UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA

"POR UN DESARROLLO AGRARIO INTEGRAL Y SOSTENIBLE"

Centenaria del Agro 1917-2017

"Por un Desarrollo Agrario Integral y Sostenible"

MÓDULO:

HABILIDADES NUMÉRICAS

Aritmética, Álgebra y Geometría

Año Lectivo 2016

"Transformar para avanzar con calidad"

Autores:

María Auxiliadora Rosales
Emilio José Fajardo Alfaro
Belkir Antonio González Mairena
Luis Francisco Alvarado López
Mauricio Alexander González Salazar
Javier Francisco Velásquez Rizo
Martha del Rosario Gutiérrez Castillo
Néstor Allan Alvarado Díaz
Alba Luz Rodríguez Castro
María Lisseth Valdivia Flores
Glenda Bonilla Zúniga
Martha Elizabeth Moraga Quezada

Asesor Pedagógico: **Miguel Caldera Torres**

INDICE

INTRODUCCIÓN

En este curso abordaremos tópicos selectos de tres de las áreas más importantes de la matemática, no por su valor histórico sino por su aplicabilidad y papel fundamental en el desarrollo de la ciencia a nivel general: la aritmética, el álgebra y la geometría.

¿Alguna vez has pensado cómo usas los números a diario? ¿Cómo se ven los números que te rodean? El sistema numérico más usado en la vida cotidiana es el basado en diez símbolos llamados dígitos $(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0)$ y símbolos de puntuación $(\times, \div, !, =, \text{ etc})$. Estos símbolos es todo lo que necesitas para escribir números para lo que quieras. Con unos pocos símbolos puedes escribir cantidades más grandes que todas las estrellas del firmamento y más pequeños que el tamaño de un electrón en una molécula. Acá encontrarás números como estos y cómo funcionan. Encontrarás información de cómo sumar, restar, multiplicar y dividir con números reales.

Este concepto de cantidad en Álgebra es mucho más amplio que en Aritmética. En aritmética las cantidades se representan por números y estos expresan valores determinados. Así, 20 expresa un solo valor: veinte; para expresar un valor mayor o menor que éste, habrá que escribir un número distinto de 20. En Álgebra, para lograr la generalización, las cantidades se representan por medio de letras, las cuales pueden representar todos los valores. Así, *a* representa el valor que nosotros le asignemos, y por tanto puede representar 20 o más de 20 o menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, ésta no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado. Por ello, acá te enseñaremos a manipular dichas expresiones algebraicas y su importante relación con los fenómenos de la vida real.

Finalizaremos con un pequeño estudio de Geometría, si bien es cierto para los griegos las matemáticas eran sobre todo geometría, una especialmente rígida en comparación con la actual, sin embargo es gracias a ellos que hoy podemos hacer uso de fórmulas generales para trabajar con figuras geométricas particulares (fórmulas para áreas y volúmenes, por ejemplo). Nos enfatizaremos en dos nociones:

- ✓ Área de una figura bidimensional, y
- ✓ Volumen de cuerpos tridimensionales.

Esperamos que disfrutes de este pequeño viaje por estas tres islas del fabuloso archipiélago de las matemáticas, mismo que no harás solo pues tendrás de la mano este pequeño material y el apoyo incondicional de tu facilitador.

Los Autores

RECOMENDACIONES METODOLÓGCAS

SOLUCIONAR PROBLEMAS

Por lo general, los problemas no son fáciles. Por eso debes hacer lo que hacen todos los buenos matemáticos: sigue intentándolo y ensayando estrategias que te sirvan para solucionarlos. Si lo primero que ensayas no funciona, no te preocupes. Revisa lo que hiciste e inténtalo de nuevo.

Guía para solucionar problemas verbales

1) **Lee** el problema varias veces hasta que lo entiendas
2) **Planifica.** Piensa en una estrategia que puedas usar.
3) **Soluciona.** Ensaya tu estrategia. No te rindas. Sigue probando varias cosas. Si una idea o una estrategia no funciona, ensaya otra.
4) **Verifica** lo que hiciste para asegurarte de que tiene sentido.

Si no entiendes un problema, ensaya estas ideas:

- ✓ Lee de nuevo el problema despacio.
- ✓ Imagina lo que sucede en el problema. Estudia las ilustraciones, las tablas o diagramas que tenga el problema.
- ✓ Toma notas o haz dibujos que te ayuden.
- ✓ Busca los términos o signos que no entiendas.

Si has ensayado varias cosas pero no logras avanzar, haz otra cosa durante unos minutos. Luego, regresa a estudiar el problema.

Cuando encuentres una respuesta, mira atrás y pregúntate: ¿Tiene sentido mi respuesta? ¿Responde al problema? ¿Mis cálculos están bien? ¿Mi respuesta es razonable?

ESTRATEGIAS PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS

Para solucionar un problema, ensaya las siguientes estrategias.

Estimar, verificar y revisar. Cuando armas un rompecabezas, tratas de adivinar que piezas van juntas. Luego las ensayas hasta que encuentras las que calzan. Estimar, verificar y revisar te puede servir para solucionar problemas de matemáticas.

<u>Caso de utilidad:</u> La profesora María compró dos tipos de libros. Los libros de Química cuestan $\$ 38$ cada uno y los de Edafología $\$ 29$ cada uno. Gastó en total $\$ 250$, pero el recibo en la librería no describe cada libro por separado. ¿Cuántos libros de cada tipo compró la profesora si en total compró 8 libros?

Trabajar hacia atrás. Con frecuencia sabes cómo ir de un lugar (punto A) a otro lugar (punto B), por ejemplo de tu casa a la universidad. Para regresar desde el punto B hasta el punto A sigues el mismo camino pero al revés. Sabes de donde saliste y conoces el camino. Quieres hallar el punto de partida. Puedes usar la estrategia de trabajar hacia atrás para solucionar algunos problemas.

Caso de aplicación: Natalia y cinco compañeras fueron a comprar un tipo de fertilizante para un trabajo en equipo. Cada joven pidió un fertilizante. La cuenta de $C\$\ 870$ incluyó el impuesto a las ventas de $C\$\ 114$. ¿Cuánto cuesta un fertilizante sin el IVA?

Haz una tabla o una lista ordenada. Si quieres hacer una gran fiesta, tal vez necesitas hacer una lista ordenada o una tabla para anotar a los invitados, las actividades y los premios que vas a dar. Esto te puede ayudar también en matemáticas.

Caso de utilidad: Hay 8 jugadores en un torneo de tenis. Cada jugador debe jugar un partido con cada uno de los otros jugadores. ¿Cuántos partidos se jugarán?

Usar números más sencillos. Para solucionar un problema difícil, empieza con un problema más sencillo que tenga números más fáciles.

Escribe una ecuación. Si ya sabes escribir ecuaciones para ejercicios de álgebra y geometría, puedes usar estos conocimientos como estrategia para resolver problemas.

Haz un modelo o un diagrama, busca patrones o haz una gráfica. Si quieres hacer una biblioteca o un cuadro para una foto, primero harías un dibujo para decidir qué materiales necesitas o cómo harías el diseño. Además, una gráfica te ayuda a ver mejor la información de algunos problemas.

DESTREZAS PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS

Las siguientes destrezas para solucionar problemas se pueden usar con cualquier estrategia:

- **a.** Tomar notas. Esto te ayudará a organizar el problema por partes. Así es más fácil de solucionarlo.
- **b.** Hacer un plan. Imagina que cada uno de tus profesores te da una tarea. ¿Por cuál empiezas? Si haces un plan para cada tarea, el trabajo será más fácil.
- **c.** Ignorar la información innecesaria. ¿Alguna vez has leído un artículo en el periódico o una revista en el que te dan más información de la necesaria? Hay que leer con cuidado para extraer la información que nos interesa.
- **d.** Buscar información necesaria.
- **e.** Usar sentido matemático. Algunas veces puedes encontrar casos en los que no sabes cuál será el resultado de algo. Puedes usar tu sentido común para tomar decisiones.
- **f.** Razonamiento lógico y más de una respuesta. ¿Alguna vez has usado tu capacidad de razonar para solucionar algún misterio?
- **g.** Usar más de una estrategia para hallar la solución.

CONSEJOS PARA ESTUDIAR

Tomar notas y llevar un diario. Escuchar. Trabajar en equipo. Administrar tu tiempo.

Tomar notas y llevar un diario

La mejor razón para tomar notas es que puedes olvidar muchas cosas que dijo el maestro o que dijeron tus compañeros que son importantes. Y, después de varios días, habrás olvidado más cosas. Si tomas notas, mejoras tu capacidad para entender los temas nuevos porque así escuchas con mucha más atención y te concentras en los detalles. Un diario de matemáticas sirve para escribas y dibujes diagramas o ilustraciones.

¡Evalúa tus notas¡ Si tus notas son difíciles de leer o están incompletas no te serán de mucha ayuda cuando estudies para los exámenes. Algunas pautas para mejorar tu destreza de tomar notas son: presta atención en clase, se concreto y organízate.

Escuchar

Cuando ves al maestro desarrollar un problema escucha con cuidado. Piensa en lo que está diciendo el maestro y cómo está solucionando el problema. Si no estás seguro sobre alguno de los pasos o una parte de la solución, pregunta.

Trabajar en equipo

Es muy importante aprender a trabajar en equipo. Bien se trate de proyecto de la universidad, tu barrio o la familia, si el grupo trabaja unido obtendrá buenos resultados. Para que tu grupo sea más efectivo practica: cooperación, responsabilidad, escuchar, dar ánimo, tomar decisiones y creatividad..

Administra tu tiempo

Si ves que no puedes terminar las cosas a tiempo (o simplemente no puedes terminarlas), trata de administrar tu tiempo. Así organizarás mejor tu tiempo para estudiar.

- Lleva un horario semanal
- Haz una lista diaria
- Haz un horario de tareas
- Fija metas
- Completa lo que tiene que hacer a tiempo.

Unidad I

OPERACIONES ARITMÉTICAS

Aplica operaciones aritméticas para resolver situaciones problémicas del campo agrario y ambiental de manera precisa

Generalidades

Estimado estudiante, en esta unidad abordaremos las principales operaciones que se pueden realizar con los números reales, así como sus propiedades. Como recordará de su aprendizaje en la escuela Secundaria, ha quedado claro que la necesidad de contar fue la base para el desarrollo de los sistemas de numeración, desde los más sencillos que utilizaban marcas hasta nuestros actuales sistemas posicionales de numeración. De ellos, el más aceptado es nuestro sistema indoarábigo (o decimal). Si bien es cierto, han tenido que pasar largos períodos de tiempo para tener el actual conjunto de números reales, de los naturales $(\mathbb{N})$ a los enteros $(\mathbb{Z})$, pasando luego a los racionales $(\mathbb{Q})$ que junto a los irracionales $(\mathbb{Q}')$ formarán el conjunto de los reales $(\mathbb{R})$. Ampliando en cada uno de ellos el dominio de las operaciones de adición y multiplicación.

Ejemplo 1: Liste los números del conjunto

$$S=\left\{-5,\quad -\frac{2}{3},\quad 0,\quad \sqrt{2},\quad \frac{13}{4},\quad 5,\quad 5.8\right\}$$

que pertenecen a cada uno de los siguientes conjuntos.

- **i.** Números naturales
- **ii.** Enteros negativos
- **iii.** Racionales no negativos
- **iv.** Irracionales
- **v.** Reales

El único número natural es el 5.

Solamente -5 es un entero negativo.

Los racionales no negativos son $0,\ \frac{13}{4},\ 5$ y 5.8 debido a que cada uno de ellos puede escribirse como el cociente de dos enteros no negativos, a saber,

$$\frac{0}{1},\ \frac{13}{4},\ \frac{5}{1},\ \frac{58}{10}.$$

El único número irracional de S es $\sqrt{2}$.

Todos los números en el conjunto son números reales.

Otro concepto importante que necesitamos abordar antes de operar con números reales es el concepto de valor absoluto de un número real, recordando sí, que para cualquier número real a existe otro número real denotado $-a$ (y denominado opuesto de a) talque siempre se cumplen las igualdades $a+(-a)=0=-a+a$.

Valor absoluto. El valor absoluto de un número real x se define como

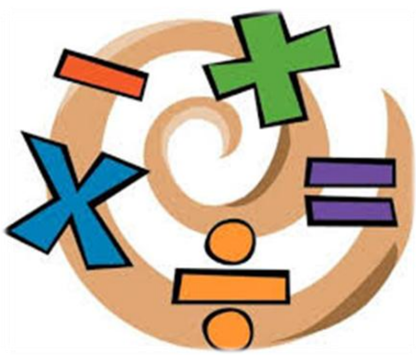
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Con esta definición, si x es un número positivo o cero, entonces su valor absoluto es el mismo x. Por ejemplo, como 8 es un número positivo, $|8| = 8$. Sin embargo, si x es un número negativo, entonces su valor absoluto es el opuesto de x. Por ejemplo, ya que -9 es un número negativo, $|-9| = -(-9) = 9$.

¡ATENCIÓN!

El $-x$ en la definición de valor absoluto no representa a un número negativo sino al opuesto de x.

OPERACIONES, PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LOS NÚMEROS REALES



Muchas personas creen que las matemáticas son sólo cálculos. No es así. Pero los cálculos son parte indispensable de las matemáticas que usas en tu vida diaria y usarás en el campo laboral. En esta sección encontrarás información sobre las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división).

La adición puede ser la operación más importante de las matemáticas.

La sustracción es lo opuesto de la adición. No puedes restar a menos que sepas sumar.

Multiplicar es sumar la misma cosa una y otra vez, tantas como te lo indique una de las cantidades.

Dividir es lo opuesto de multiplicar y por tanto se relaciona con la adición.

SUMA DE NÚMEROS REALES

Signos iguales. Para sumar dos números con el mismo signo, deben sumarse sus valores absolutos. El signo de la suma es el mismo que el signo de los dos números.

Signos diferentes. Para sumar dos números con signos diferentes debe restarse el valor absoluto más pequeño del más grande. La suma es positiva si el número positivo tiene el valor absoluto más grande. La suma es negativa si el número negativo posee el valor absoluto más grande.

¡ATENCIÓN!

Es casi seguro que sumas mentalmente todos los días. A veces lo haces porque los números son fáciles, pero otras veces necesitas papel o calculadora.

Ejemplo 2: Determine cada una de las siguientes sumas:

a) $(-6) + (-3) = -(6 + 3) = -9$

b) $4 + (-1) = 3$

c) $-9+16=7$

d) $\frac{12}{5}+\frac{3}{7}=\frac{84+15}{35}=\frac{99}{35}$

e) $324.36+23.035=347.395$

SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS REALES

La resta te sirve para muchas cosas:

- ✓ Si quieres quitarle una cantidad a otra cantidad, se resta. Tienes $C\$\,28$ y gastas $C\$\,15$. Restas para conseguir cuánto te queda.
- ✓ Si quieres comparar una cantidad con otra, resta. Tu mochila llena de libros pesa $14\,\frac{1}{2}$ libras. La de Marlon pesa $7\,\frac{4}{7}$ libras. Restas para averiguar cuánto peso llevas más tú.
- ✓ Si conoces parte de una cantidad y también toda la cantidad, pero necesitas averiguar la otra parte, restas. Tu hermanito encontró 36 chibolas, pero toda su colección es de 50. Restas para averiguar cuántas chibolas están perdidas bajo los muebles a punto de hacerte resbalar y caer.

Para las fracciones tendremos las siguientes reglas:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Formalmente, tenemos pues que para todos los número reales a y b, se tiene que

$$a-b=a+(-b).$$

Ejemplo 3: Determine cada una de las siguientes restas:

a) $6-8=6+(-8)=-2$

b) $-12-4=-12+(-4)=-(12+4)=-16$

c) $\frac{173}{180}-\frac{69}{1200}=\frac{3460-207}{3600}=\frac{3253}{3600}$

d) $324.36+23.035=347.395$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

La multiplicación es una forma más rápida de sumar. Imagina que la recolección de latas de tu clase de vida rural fue un éxito. Reunieron $1\,275$ latas que se pueden vender por $C\$\,5$ cada una. Tú eres el tesorero de la clase y no quieres sumar 5 córdobas un mil doscientas setenta y cinco veces. Por eso estás contento de que sabes multiplicar.

De manera general, para cualesquiera números reales tenemos que:

Signos Iguales. Para multiplicar dos números con el *mismo* signo, multiplique sus valores absolutos. El producto es positivo.

Signos diferentes. Para multiplicar dos números con signos *diferentes*, multiplique sus valores absolutos. El producto es negativo.

Ejemplo 4: Determine cada uno de los siguientes productos:

a) $-9 \cdot 7 = -63$
b) $(-8)(-4) = 32$
c) $1.80 \times 3.29 = 5.9220$

DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES

Dividir es lo opuesto de multiplicar. Cada vez que divides, usas la multiplicación. Hay dos razones para dividir:

a) cuando conoces la cantidad original y el número de partes, divides para hallar el tamaño de cada parte;
b) cuando conoces el tamaño original y el tamaño de cada parte, divides para hallar el número de partes.

¡ATENCIÓN!
Cuando dividas medidas, asegúrate de usar siempre la MISMA unidad de medición. Puedes dividir gramos por gramos pero NO puedes dividir metros por pulgadas.

Signos Iguales. Para dividir dos números con el *mismo* signo, deben dividirse sus valores absolutos. El cociente es positivo.

Signos diferentes. Para dividir dos números con signos *diferentes*, hay que dividir sus valores absolutos. El cociente es negativo.

Nota: La división por cero no está definida.

Ejemplo 5: Realice las siguientes divisiones:

a) $15 \div (-3) = -5$
b) $(-100) \div (-25) = 4$
c) $26.88 \div 4 = 6.72$
d) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{24}{4} = 6$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES PRINCIPALES (Adición y Multiplicación)

- ✓ Clausura. $\forall a, b \in \mathbb{R}: \; a + b \in \mathbb{R}, \; ab \in \mathbb{R}$
- ✓ Conmutatividad. $\forall a, b \in \mathbb{R}: \; a + b = b + a$ y $ab = ba$
- ✓ Asociatividad. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \; (a + b) + c = a + (b + c)$ y $(ab)c = a(bc)$
- ✓ Identidad. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists!\, 0 \in \mathbb{R} : 0 + a = a = a + 0$
  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists!\, 1 \in \mathbb{R} : 1a = a = a1$
- ✓ Inversos. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists!\, (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 = -a + a$
  $(\forall a \in \mathbb{R}, \; a \neq 0)\, \exists!\, (a^{-1}) \in \mathbb{R} : \; a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$
- ✓ Distributividad. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \; a(b + c) = ab + ac$ y $(b + c)a = ba + ca$

POTENCIAS Y RAÍCES

Potencias, raíces y logaritmos suenan como temas de historia, física, biología y música, no de matemáticas. En esta sección, aprenderás que una potencia es una forma corta de escribir factores, que las raíces son factores especiales de un número y que los logaritmos son una forma de ver factores que hace más fácil trabajar con números grandes o muy pequeños.

Exponentes positivos. Supongamos que multiplicas por el mismo factor más de una vez. Puedes mostrar los factores periódicos usando la forma exponencial en la cual la base es el factor que se repite y el exponente indica el número de veces que se repite la base:

$$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ veces}} = a^n.$$

¡ATENCIÓN!

Los matemáticos están de acuerdo en que cualquier número no nulo elevado al exponente cero es uno. Entonces,

$23^0 = 1, \quad (-36)^0 = 1.$

Exponentes negativos. Mira el patrón de la derecha. Verás que si la base es 3, cada vez que disminuyas el exponente en 1, el valor es $\frac{1}{3}$ menos.

Si la base es 17, cada vez que disminuyes el exponente en 1, el valor es $\frac{1}{17}$ menos.

$$\left.\begin{array}{l} 3^3 = 27 \\ 3^2 = 9 \end{array}\right\} \; 9 \text{ es un } \tfrac{1}{3} \text{ de } 27$$

$$\left.\begin{array}{l} 3^1 = 3 \\ 3^0 = 1 \end{array}\right\} \; 1 \text{ es un } \tfrac{1}{3} \text{ de } 3$$

$$\left.\begin{array}{l} 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} \\ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \end{array}\right\} \; \tfrac{1}{9} \text{ es un } \tfrac{1}{3} \text{ de } \tfrac{1}{3}$$

De manera general, podemos decir que para cualquier número a distinto de cero y cualquier entero n, tenemos

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}.$$

Exponentes fraccionarios. ¿Qué significan los exponentes fraccionarios, por ejemplo, $8^{\frac{1}{3}}$? Para entender los exponentes fraccionarios, piensa que la base es un producto. El denominador del exponente indica el número de veces que se repite un factor para dar la base. Busca ese factor y luego elévalo a la potencia del numerador del exponente.

Por ejemplo, calculemos $81^{\frac{3}{4}}$.

El denominador del exponente es 4. Entonces se repite 4 veces un factor para dar 81. El factor es 3 pues $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

El numerador del exponente es 3, entonces $3^3 = 27$.

Por tanto, $81^{\frac{3}{4}} = 27$.

Raíces cuadradas y cúbicas. Las raíces no son más que un caso especial de exponentes fraccionarios puesto que

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}.$$

Si un número natural no es cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es irracional. Esto significa que no se puede representar como una razón de enteros. Se representa con un decimal infinito no periódico, por ejemplo,

$$\sqrt[2]{2} = 1.4142135\ldots \quad \text{y} \quad \sqrt{11} = 3.3166247\ldots$$

Una calculadora te dará una raíz aproximada. Así que cuando calcules una raíz que no es perfecta, tu respuesta no será exacta.

ORDEN DE LAS OPERACIONES

Dado un problema como $5 + 2 \cdot \frac{1}{3} - 10$, ¿debe sumarse primero el 5 con el 2 o debe multiplicarse 2 por $\frac{1}{3}$ y luego restarle 10 al resultado? Cuando un problema comprende más de una operación, utilizamos el siguiente orden de operaciones. (Este es el orden utilizado por las computadoras y muchas calculadoras).

Si hay paréntesis o corchetes.

1) Resuelva los numeradores y denominadores de las fracciones por separado.
2) Utilice las reglas siguientes dentro de cada conjunto de paréntesis o corchetes. Comience con el conjunto más interno y trabaje hacia afuera.

Si no hay paréntesis o corchetes.

1) Aplique todos los exponentes.
2) Haga las multiplicaciones o divisiones en el orden en que aparezcan, trabajando de izquierda a derecha.
3) Haga las sumas y restas en el orden en que aparezcan, trabajando de izquierda a derecha.

Ejemplo 6: Utilice el orden de las operaciones para calcular:

a) $4 \cdot 3^2 + 7 - (2 + 8)$

b) $\frac{2(8-12)-11(4)}{5(-2)-3}$

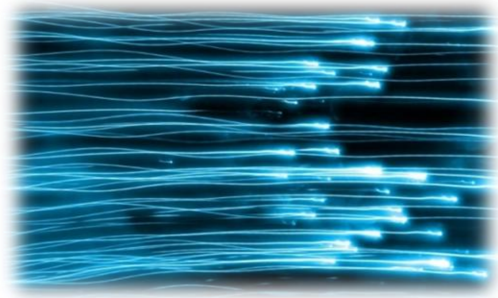
c) $\left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6}$

a) $4 \cdot 3^2 + 7 - (2 + 8) = 4 \cdot 9 + 7 - 10 = 36 - 3 = 33.$

b) $\frac{2(8-12)-11(4)}{5(-2)-3} = \frac{2(-4)-11(4)}{5(-2)-3} = \frac{-8-44}{-10-3} = \frac{-52}{-13} = 4.$

c) $\left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{1}\right) + \frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$

NOTACIÓN CIENTÍFICA



Algunas veces tienes que escribir decimales muy pequeños o muy grandes. Puedes escribirlos en *notación científica*. Si usas notación científica, no tienes que contar tantos ceros cada vez que lees un número. Para escribir un número en notación científica, puedes hacerlo como el producto de dos factores:

(un decimal mayor o igual a 1 pero menor que 10) $\times$ (una potencia de 10).

Para escribir un número en notación científica:

1. Cuenta cuantas posiciones mueves el punto decimal hacia la izquierda hasta obtener un número decimal entre 1 y 10, inclusive 1.
2. Escribe como exponente el número de posiciones que moviste el punto decimal

Ejemplo 7: La luz viaja a una velocidad de $18\,000\,000\,000$ metros por minuto. Escribe este número en notación científica.

$$18\,000\,000\,000 = 1.8 \times 10\,000\,000\,000 = 1.8 \times 10^{10}$$

un decimal $\geq$ 1 y < 10

potencia de 10

Para escribir un número entre cero y 1 en notación científica:

1. Cuenta cuantas posiciones mueves el punto decimal hacia la derecha.
2. Como exponente, usa el signo negativo y el número de posiciones que moviste el punto decimal.

REGLA DE TRES

Regla de tres simple es el procedimiento empleado para resolver situaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes. Puede ser:

- **Directa** si las magnitudes son directamente proporcionales, e
- **Inversa** si las magnitudes son inversamente proporcionales.

Ejemplo 8: ¿Cuánto costarán 10 camisas si 7 camisas cuestan $C\$\ 1\,260$?

La cantidad de camisas a comprar y el costo total de la compra son magnitudes directamente proporcionales. Se usa una regla de tres directa.

Número de Camisas a comprar	Costo de la compra
7	$1\,260$
10	x

Según la tabla, la proporción correspondiente es

$$\frac{7}{1\,260}=\frac{10}{x},$$

de donde

$$x=\frac{(10)(1\,260)}{7}=1\,800.$$

La compra de las 10 camisas costará $C\$\;1\,800.00$

PORCENTAJES

Los porcentajes nos indican qué significa una cantidad. ¿Qué entenderías si alguien te dijera que la Sociedad protectora de Animales encontró nuevos hogares para 6 cachorros más que el mes pasado? ¿Ese cambio es grande?

Si además te dijeran que ese aumento es 100% más que el mes pasado, la respuesta es sí. Pero si este aumento es de 1%, entonces 6 cachorros más no es una gran diferencia.

Llamaremos *porcentaje* o *tanto por ciento* a todas aquellas razones en las que el denominador es 100. Se representa con el símbolo $\%$, que significa por cada 100. Si un banco paga intereses al 8% mensual significa que por cada $C\$\;100$ que se consigan, el banco pagará $C\$\;8$ cada mes.

Porcentaje	Fracción	Decimal
25%	$\frac{25}{100}$	0.25
2%	$\frac{2}{100}$	0.02
0.5%	$\frac{0.5}{100}=\frac{5}{1000}$	0.005
$33\,\frac{1}{3}\,\%$	$\frac{33\,\frac{1}{3}}{100}$	$0.33\overline{3}$

Ejemplo 9: Hallar los porcentajes indicados:

1) 15% de 2000

2) 40% de 300

3) ¿De qué número es 12 su 60%?

1. $2\,000\times\frac{15}{100}=300.$
2. $300\times 0.40=120.$
3. $\frac{6}{100}=\frac{12}{x}\to 6x=12(100)\to x=\frac{1200}{6}\to x=200.$

Para aprovechar al máximo un porcentaje, piensa que se trata de una ecuación.

Ecuación verbal: un $a\%$ de un todo es igual a una parte del todo.

Ecuación algebraica: $a\,\% \cdot b = c$.

Hay tres variables en una ecuación algebraica de porcentajes. Si conoces dos cualesquiera de esos números, puedes hallar el tercero con álgebra o con una proporción.

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES Y SISTEMA INGLÉS

Sistema Internacional de Unidades

El Sistema Internacional de unidades (SI) creado en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas en $1\,960$, es el sistema de unidades que se usa en todos los países del mundo, a excepción de tres que no lo han declarado prioritario o único.

Es el heredero del antiguo Sistema Métrico Decimal y por ello también se conoce como «sistema métrico».

Una de las características trascendentales, que constituye la gran ventaja del Sistema Internacional, es que sus unidades se basan en fenómenos físicos fundamentales. Excepción única es la unidad de la magnitud *masa*, el kilogramo, definida como «la masa del prototipo internacional del kilogramo», un cilindro de platino e iridio almacenado en una caja fuerte de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Las unidades del SI constituyen referencia internacional de las indicaciones de los instrumentos de medición, a las cuales están referidas mediante una concatenación ininterrumpida de calibraciones o comparaciones. Esto permite lograr equivalencia de las medidas realizadas con instrumentos similares, utilizados y calibrados en lugares distantes y, por ende, asegurar —sin necesidad de duplicación de ensayos y mediciones— el cumplimiento de las características de los productos que son objeto de transacciones en el comercio internacional, su intercambiabilidad.

Está dividido en dos clases de unidades: siete Unidades básicas (fundamentales) y Unidades derivadas (que se desprenden de las anteriores).

UNIDADES BÁSICAS		
Magnitud	**Nombre de la unidad**	**Símbolo**
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd
UNIDADES DERIVADAS (algunas)		
Magnitud	**Nombre de la unidad**	**Símbolo**
Superficie	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Velocidad	Metro por segundo	m/s
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Concentración	Mol por metro cúbico	mol/m^3
Fuerza	Newton	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$
Trabajo, Energía	Joule	$J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Potencia y flujo de energía	Watt (Vatio)	$W = \frac{J}{s} = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3}$
Dosis ambiental	Sievert	$Sv = J/kg$

El SI ha aceptado como unidades legales una serie de unidades de sistemas anteriores:

- ✓ Litro (l)
- ✓ Bar (bar)
- ✓ Celsius $(°C)$
- ✓ Hectárea (ha)

Nota: Respecto a la temperatura, tres son las escalas de medición más utilizadas (Celsius, Kelvin y Fahrenheit), cuya relación está dada por la ecuación

$$\frac{°C}{5} = \frac{°K - 273}{5} = \frac{°F - 32}{9}.$$

Si quisiéramos convertir $50°C$ a $°F$ sería

$$\frac{°C}{5} = \frac{°F - 32}{9} \rightarrow °F = \frac{9\,°C}{5} + 32 \rightarrow °F = \frac{9\,(50)}{5} + 32 = 90 + 32 = 122.$$

Es decir que $50\,°C = 122\,°F$.

Múltiplos y submúltiplos de las unidades del SI

Un prefijo combinado con una unidad denota que la unidad es multiplicada por una determinada potencia de diez. La nueva unidad es llamada un (decimal) múltiplo o submúltiplo. Los prefijos son utilizados para evitar los valores numéricos grandes o muy pequeños.

Factor por el que se multiplica la unidad	Prefijo	
	Nombre	Símbolo
$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$	tera	T
$10^{9} = 1\,000\,000\,000$	giga	G
$10^{6} = 1\,000\,000$	mega	M
$10^{3} = 1\,000$	kilo	k
$10^{2} = 100$	hecto	h
$10^{1} = 10$	deca	da
$10^{-1} = 0{,}1$	deci	d
$10^{-2} = 0{,}01$	centi	c
$10^{-3} = 0{,}00\,1$	mili	m
$10^{-6} = 0{,}000\,001$	micro	μ
$10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$	nano	n
$10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$	pico	p

Por ejemplo, un kilómetro

$$1\ km = 10^3\ m = 1\,000\ m.$$

Un nanogramo es

$$1\ ng = 10^{-9}\ g = 0{,}000\,000\,001\ g.$$

Sistema Anglosajón de Unidades (Sistema Inglés)

El sistema anglosajón de unidades es el conjunto de las unidades no métricas que se utilizan actualmente como medida principal en Estados Unidos.

El sistema para medir longitudes en los Estados Unidos se basa en la pulgada, el pie, la yarda y la milla. Cada una de estas unidades tiene dos definiciones ligeramente distintas, lo que ocasiona que existan dos diferentes sistemas de medición, acá los más aceptados.

Pulgada (in)
pie (ft)
yarda (yd)
milla (mi)
acre (ac)

$1\ in = 2{,}54\ cm;$ $\quad 1\ ft = 12\ in = 30{,}48\ cm;$

$1\ yd = 3\ ft = 91{,}44\ cm;$ $\quad 1\ mi = 1{,}609347\ km.$

Para unidades de superficie tenemos:

$1\ in^2 = 6{,}4516\ cm^2$ $\quad 1\ ft^2 = 144\ in^2$ $\quad 1\ yd^2 = 9\ ft^2$ $\quad 1\ ac = 4{,}840\ yd^2$

Para volumen (líquidos):

$1\ qt = 1{,}10122094272\ l$ $\quad 1\ gal = 4\ qt$ $\quad 1\ barril = 42\ gal$

Para masa:

$1\ lb = 453{,}6\ g$ $\quad 1\ oz = 28{,}3\ g$ $\quad 1\ t = 907{,}2\ kg$

Conversión de unidades

Ejemplo10: Realice las conversiones indicadas:

1) $8\ hm\ \ 25\ dam\ \ 333\ cm$ a metros
2) $30\ dm\ 40cm\ 300\ mm$ a pulgadas
3) $8\ km^2\ 31\ hm^2\ 50\ dam^2$ a hectáreas
4) $15\ 000\ mm^3$ a centímetros cúbicos
5) $45\ °C$ a $°K$

1) Primero vamos a convertir cada cantidad a metros y luego sumamos, así:

$$8\ hm = 8\ \times 10^2\ m = 8 \times 100\ m = 800\ m$$

$$25\ Dm = 25 \times 10^1\ m = 25 \times 10\ m = 250\ m$$

$$333\ cm = 333 \times 10^{-2}\ m = 333 \times 0{,}01 = 3{,}33\ m$$

Luego, $8\ hm\ \ 25\ dam\ \ 333\ cm = 800\ m + 250\ m + 3{,}33\ m = 1\ 053{,}33\ m$.

2) Tenemos que

$$30\ dm = 30 \times 10^{-1}\ m = 30 \times 0{,}1\ m = 3\ m = 3 \times 100\ cm = 300\ cm$$

$$40cm = 40\ cm$$

$$300\ mm = 300 \times 10^{-3}\ m = 300 \times 0{,}001\ m = 0{,}3\ m = 0{,}3 \times 100\ cm = 30\ cm$$

Luego, $30\ dm\ 40cm\ 300\ mm = 300\ cm + 40\ cm + 30\ cm = 370\ cm$. Como una pulgada equivale a tener $2{,}54\ cm$. Resulta que

$$370\ cm \times \frac{1\ in}{2{,}54\ cm} = \frac{370\ in}{2{,}54} \approx 145{,}67\ in.$$

Por tanto, $30\ dm\ 40cm\ 300\ mm \approx 145{,}67\ in$.

3) Como estamos en presencia de medidas de superficie, los factores relacionales de longitud se elevan al cuadrado para ser aplicados al caso, tenemos

$$8\ km^2 = 8 \times (10^3\ m)^2 = 8 \times 10^6\ m^2 = 8 \times 10^6\ m^2 \times \frac{1\ hm^2}{10^4\ m} = 8 \times 10^2\ hm^2$$

$$31\ hm^2 = 31\ hm^2$$

$$50\ dam^2 = 50 \times (10^1\ m)^2 = 50 \times 10^2\ m^2. = 50 \times 10^2\ m^2 \times \frac{1\ hm^2}{10^4\ m^2} = 50 \times 10^{-2}\ hm^2$$

Luego,

$$\begin{aligned} 8\ km^2\ 31\ hm^2\ 50\ dam^2 &= 8 \times 10^2\ hm^2 + 31\ hm^2 + 50 \times 10^{-2}\ hm^2 \\ &= 831{,}5\ hm^2 = 831{,}5\ ha. \end{aligned}$$

4) Ahora,

$$\begin{aligned} 15\ 000\ mm^3 &= 15\ 000 \times (10^{-3}\ m)^3 = 15 \times 10^3 \times 10^{-9}\ m^3 \\ &= 15 \times 10^{-6}\ m^3 = 15 \times 10^{-6} \times 10^6\ cm^3 \\ &= 15\ cm^3. \end{aligned}$$

5) Es verdadera la igualdad

$$\frac{°C}{5} = \frac{°K - 273}{5}$$

Luego, $°K = °C + 273\ \ \to\ \ °K = 45 + 273 = 318\ \ \to\ \ 45\ °C = 318\ °K$.

Indicador 1. Resuelve operaciones aritméticas para dar repuesta a situaciones problémicas de campo agrario.

Actividad 1 Resuelve operaciones aritméticas

1) Realice las operaciones indicadas, usando el orden de las operaciones cuando sea necesario. Exprese las respuestas en términos simplificados.

a. $-8(-2)-[(4^2)+(7-3)]$

b. $\dfrac{(-6+3)\times(-4)}{-5-1}$

c. $\dfrac{2(-5+3)\times(-4)}{-2^2}-\dfrac{(-3^2+2)(3)}{3-(-4)}$

d. $\dfrac{5-3\left(\frac{-5-9}{-7}\right)-6}{-9-11+3\times 7}$

e. $2\sqrt{48}-\sqrt{3}$

f. $\frac{2}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\div\frac{3}{10}\right)$

g. $2.45(1.2+3.4-5.6)$

h. $\dfrac{118.5}{1.45+2.3}$

i. $3\sqrt{18}+\sqrt{2}$

j. $\dfrac{\frac{11}{15}+\frac{1}{9}}{\frac{13}{15}-\frac{2}{3}}$

2) Escriba en notación científica las siguientes cantidades:

a. 45

b. 9 785 000 000 000

c. 2016

d. 250 216

e. 0.01

f. 0.000089

3) Escribe las siguientes cantidades dadas en notación científica:

a. 5.014×10^4

b. 9.3×10^{10}

c. 5×10^{12}

d. 23.43×10^0

e. 9.01×10^{-7}

f. 4.3×10^{-5}

4) Problemas

a. Muchos acontecimientos de la vida real pueden considerarse como operaciones de opuestos o inversos. Por ejemplo, la operación inversa de “irse a dormir” es “despertarse”. Para cada una de las siguientes actividades especifique su inverso.

i. Limpiar su cuarto

ii. Alcanzar buenas calificaciones

iii. Aumentar el volumen de su reproductor de música

iv. Comercializar productos agropecuarios con valor agregado

v. Reforestar en áreas áridas

b. Muchas actividades cotidianas son conmutativas; es decir, el orden en el cual se realizan no afecta el resultado. Por ejemplo, "ponerse la camisa" y "ponerse los pantalones" son operaciones conmutativas. Determine si las siguientes actividades lo son.

- **i.** Sembrar; Preparar la tierra
- **ii.** Vestirse; tomar una ducha
- **iii.** Realizar una cirugía porcina; aplicar anestesia
- **iv.** Peinarse el cabello; cepillarse los dientes

c. Si en una calculadora científica se introduce $12345678910111213 =$ aparece en pantalla $1.234567891 \times 10^{16}$. ¿Por qué aparece en notación científica?

d. La siguiente tabla muestra las exportaciones del año 2014 de todas las formas de café de algunos países exportadores en sacos de $60\,kg$. Rediseñe la tabla de manera que los datos representen las exportaciones de café del año 2014 en miles de sacos de $60\,kg$.

País	Número de Sacos
Brasil	36 420 000
Vietnam	25 298 000
Colombia	10 954 000
Indonesia	5 977 000
India	5 131 000
Etiopía	3 117 000
Guatemala	3 045 000
Perú	2 720 000
México	2 496 000
Nicaragua	1 900 000

Fuente: International Coffee Organization

Indicador 2. Emplea la regla de tres simple directa e inversa y el cálculo porcentual en la resolución de problemas del campo agrario.

Actividad 2 Emplea la regla de tres simple directa e inversa y el cálculo porcentual

1) Obtención del porcentaje de un número.

- **a.** ¿Qué porcentaje de 500 es 75?
- **b.** ¿38 es el 5% de qué número?
- **c.** Obtenga el 18% de 250.
- **d.** ¿30 es más del 40% de 120?
- **e.** Si un artículo cuesta normalmente $C\$\ 70.00$ y tiene un descuento del 10%, ¿entonces el precio de descuento es de $C\$\ 10.00$?

2) Problemas

- **a.** El listado de abajo detalla en porcentajes la cantidad de pasajeros que viajaron a Nicaragua durante el año 2015 en el período Enero-Noviembre. Si el total de pasajeros entrantes fue $591\ 753$, determine:
  - **i.** El número de pasajeros internacionales que viajaron a Nicaragua en cada mes.
  - **ii.** Calcule la variación del número de pasajeros entre el mes de menor tráfico y el de mayor. ¿Qué porcentaje del total de pasajeros representa? ¿Cómo verificaría este dato?

Enero	9.37 %	Julio	11.42 %
Febrero	8.65 %	Agosto	8.85 %
Marzo	9.45%	Septiembre	7.32 %
Abril	8.52 %	Octubre	7.52 %
Mayo	8.91 %	Noviembre	9.55 %
Junio	10.44 %		

Fuente: http://www.eaai.com.ni/

- **b.** La estación meteorológica del Aeropuerto Internacional Managua brindó los registros de temperatura mínima media ($°C$) durante el año 2013 en el sector de su radio de acción que se muestran en la tabla de abajo. Determine:
  - **i.** El promedio de los registros de temperatura media
  - **ii.** El promedio de las variaciones de cada registro respecto a la media calculada en el inciso anterior.

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
22.3	21.8	23.0	24.4	24.4	24.2	23.4	23.5	23.5	23.4	22.5	21.9

Fuente: INETER (Resumen Meteorológico Anual).

Indicador 3. Realiza la conversión de unidades para el cálculo de expresiones equivalentes.

Actividad 3 Realiza conversiones de unidades

1) Exprese en metros:

- **a.** $8\ hm\ \ 25\ dam\ \ 333\ cm$
- **b.** $0{,}034\ 35\ km\ \ \ 234\ dm$
- **c.** $35.4\ Mm$

2) Responda correctamente las siguientes interrogantes.

- **a.** Un campo de $13\ 418\ m^2$ se divide en cuatro partes iguales. ¿Cuántos dam^2 mide cada parte?
- **b.** El piso de una habitación cubre un área de $7\ 480\ m^2$ y contiene 44 baldosas. ¿Cuántos cm^2 cubre cada baldosa?
- **c.** Una finca de $125\ ha$ se ha vendido por partes a dos personas. La primer persona adquirió $\frac{3}{5}$ de la finca a $\$\ 5.50$ el m^2 y la otra adquirió el resto a 301 dólares el decámetro cuadrado. ¿Cuánto obtuvo el dueño de la finca por su venta?
- **d.** Un dado tiene $8\ cm$ de arista. ¿Cuál es su volumen?
- **e.** Un barco transporta $85\ dam^3$ de ron y se quiere envasar en botellas de $70\ cl$. ¿Cuántas botellas se lograrán llenar? Exprese el sobrante en litros.
- **f.** Un estudiante necesita $15\ g$ de etanol para un experimento. Si la densidad del alcohol es de $0.789\ g/ml$, ¿cuántos mililitros de alcohol necesita?

3) Calcule la masa (en kg) de:

- **a.** $2530\ mm^3$ de oro si $\rho = 19.3\ g/cm^3$
- **b.** $10\ m^3$ de nitrógeno si $\rho = 1.25\ g/l$
- **c.** $32.8\ cm^3$de antimonio si $\rho = 6.7\ g/cm^3$

4) Complete la siguiente tabla, utilizando la ecuación de conversión:

Celsius	Fahrenheit	Kelvin
$150\ °C$		
	$34\ °F$	
$-8\ °C$		
		$333\ °K$

Unidad II

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Interpreta y utiliza las operaciones algebraicas para resolver situaciones de la vida diaria

SUMARIO

En esta unidad primeramente se pretende evidenciar algunos conceptos básicos del álgebra como expresión algebraica, término, términos semejantes, polinomio, grado de un polinomio, etc.; posteriormente, se abordarán las operaciones con polinomios (suma, resta, multiplicación y división); finalizando con el estudio de las fracciones algebraicas y sus operaciones. Todo esto con el objetivo de desarrollar en ustedes habilidades de interpretación y la utilización de las operaciones algebraicas para resolver situaciones de su vida diaria.

La evaluación final consistirá en la elaboración de un portafolio de aprendizaje, un instrumento utilizado para evidenciar las habilidades que adquiriste en el transcurso del curso así como sus esfuerzos, logros y dificultades permitiendo valorar el proceso de aprendizaje y las habilidades desarrolladas durante el mismo. Este portafolio debe contener (expuestos en una carpeta): trabajos, pruebas, evaluaciones del docente y reflexiones de los estudiantes acerca de lo abordado en los contenidos de la unidad. Se entregará en pareja, al finalizar la unidad, en función de su respectiva rúbrica de evaluación.

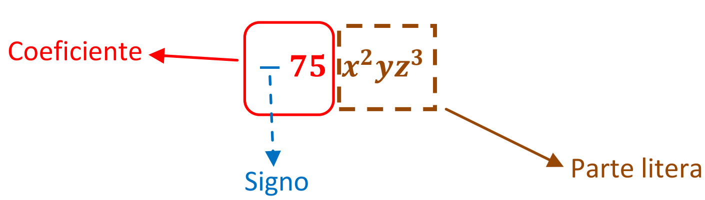
TERMINOLOGÍA BÁSICA

Expresión algebraica. Una expresión algebraica es una combinación de números, variables o símbolos y signos de operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación).

Ejemplos: $5a,\ 2x^2 - x + 5,\ (2a-b)^2$ y $\sqrt{a}$.

Término. Se llama término algebraico a una combinación finita de números y letras. Por ejemplo, $2m^4,\ 3ab^2,\ -5x^2y$.

En un término (por ejemplo, $-75x^2yz^3$) podemos distinguir los siguientes elementos:



Nota: Cuando un término consta de un solo número se le llama constante o término independiente. Por ejemplo, en la expresión $3a^2 + 5$, el segundo término 5 es una constante.

Términos Semejantes. Son aquellos términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes.

Ejemplo:

a) $2m^2n,\ -5m^2n$ y $\frac{1}{2}nm^2$ son términos semejantes

b) $5x^2y,\ 3xy^2$ y $3x^2y^2$ no son términos semejantes

Polinomio. Un polinomio es una suma finita de términos, en los cuales todas las variables tienen exponentes enteros no negativos.

Si los términos de un polinomio solo contienen la variable x, entonces el polinomio se denomina **polinomio en x** (los polinomios en otras variables se denominan en forma similar). Los siguientes son algunos ejemplos de polinomios:

$$5x^3 - 8x^2 + x - 4,\ \ 9p^5 - 3,\ \ 8r^2 \text{ y } 6.$$

La expresión $9x^2 - 4x - \frac{6}{x}$ no es un polinomio debido a la presencia de $-\frac{6}{x}$. Los términos de un polinomio no pueden tener variables en el denominador.

El exponente más grande de un polinomio en una variable es el **grado** del polinomio. Se dice que una constante distinta de 0 tiene grado cero (el polinomio 0 no tiene grado). Por ejemplo, $3x^6 - 5x^2 + 2x + 3$ es un polinomio de grado 6.

Un polinomio puede tener más de una variable: Un término que contenga más de una variable tiene grado igual a la suma de todos los exponentes que aparezcan en las variables en el término. Por ejemplo, $-3x^4y^3z^5$ es de grado $4 + 3 + 5 = 12$. El grado de un polinomio en más de una variable es igual al grado más alto de cualquier término que aparezca en el polinomio. Según esto, el polinomio

$$2x^4y^3 - 3x^5y + x^6y^2$$

es de grado 8 debido al término x^6y^2.

Un polinomio que contenga exactamente tres términos se denomina **trinomio**, y uno con exactamente dos términos es un **binomio**. Por ejemplo, $7x^9 - 8x^4 + 1$ es un trinomio de grado 9.

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Como las variables que se usan en los polinomios representan números reales, un polinomio representa un número real. Esto significa que todas las propiedades de los números reales que se mencionaron en la unidad anterior

Suma. Es una operación matemática para reunir varias expresiones algebraicas (sumandos) en una sola expresión algebraica (suma).

Ejemplo 1: sumar los polinomios $3a - 2b + 4$; $6b + 4c - 5$ y $8b - 6 - 4c$.

$$\begin{array}{rrrr} 3a & -\ 2b & & +\ 4 \\ & 6b & +\ 4c & -\ 5 \\ & 8b & -\ 4c & -\ 6 \\ \hline \mathbf{3a} & +\ \mathbf{12b} & & -\ \mathbf{7} \end{array}$$

Primero ordenamos, término semejante debajo de término semejante, para posteriormente efectuar la suma utilizando las reglas para sumar considerando los signos positivos o negativos.

Ejemplo 2: sumar los polinomios $\frac{1}{4}x^2 + xy - 5$; $\frac{1}{3}xy - \frac{2}{5}y^2 + 3$ y $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - 4$.

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + xy - 5\right) + \left(\frac{1}{3}xy - \frac{2}{5}y^2 + 3\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - 4\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\right) + \left(xy + \frac{1}{3}xy\right) + \left(\frac{3}{4}y^2 - \frac{2}{5}y^2\right) + (3 - 5 - 4)$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{7}{20}y^2 - 3}.$$

Para efectuar esta suma, agrupamos los términos semejantes de manera horizontal y luego se procede a efectuar la suma (recuerde que se suman los coeficientes utilizando reglas para sumar y luego se agrega la parte literal).

Resta. La resta o sustracción es la operación inversa de la suma. El problema consiste en dada la suma total (minuendo) y uno de los sumandos (sustraendo) hallar el otro sumando (resta o diferencia). Para efectuar la resta se escribe el minuendo con su signo, a continuación el sustraendo con el signo cambiado y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo 3: De $3a^2 - 4a + 5b - 2$ restar $x^2 + 4a + 3b - 2a^2 + 9$.

Primero identifiquemos el minuendo y el sustraendo:

De $\overbrace{3a^2 - 4a + 5b - 2}^{\text{Minuendo}}$ restar $\overbrace{x^2 + 4a + 3b - 2a^2 + 9}^{\text{Sustraendo}}$

Luego, cambiemos el signo del sustraendo:

$$3a^2 - 4a + 5b - 2 - (x^2 + 4a + 3b - 2a^2 + 9) =$$

$$= 3a^2 - 4a + 5b - 2 - x^2 - 4a - 3b + 2a^2 - 9.$$

Posteriormente, agrupemos y reduzcamos términos semejantes, así

$$3a^2 - 4a + 5b - 2 - x^2 - 4a - 3b + 2a^2 - 9 =$$

$$= (3a^2 + 2a^2) + (-4a - 4a) + (5b - 3b) - x^2 + (-2 - 9)$$

$$= 5a^2 - 8a + 2b - x^2 - 11.$$

Para reforzar estos contenidos puedes visitar la página:

https://www.youtube.com/watch?v=RumiQfiStfs

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Multiplicación. La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto. El multiplicando y multiplicador son llamados también factores del producto.

Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos todos los términos del primer factor por cada uno de los términos del segundo factor, teniendo en cuenta la ley de los signos, la propiedad distributiva de la suma con respecto a la multiplicación y la reducción de los términos semejantes.

Ejemplo 4: Calcule el producto $(a-4)(a+3)$.

$$\begin{aligned}(a-4)(a+3) &= a(a+3)-4(a+3)\\ &= a^2+3a-4a-12\\ &= \boldsymbol{a^2-a-12.}\end{aligned}$$

Algoritmo de la División de polinomios. Pensemos, ¿podemos encontrar un polinomio $q(x)$ tal que $4x^3+17x^2+8x-5=(x+3)\cdot q(x)$? La existencia o no de este polinomio queda determinada de manera única por el algoritmo de la división de polinomios (análogo a su versión para números enteros). El teorema dice así:

Sean $p(x)$ y $d(x)$ dos polinomios en x con $d(x)\neq 0$. Entonces existen dos polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$, tales que

$$p(x)=q(x)\cdot d(x)+r(x)$$

en donde $r(x)$ tiene grado menor que $d(x)$ o bien $r(x)=0$.
Si dividimos ambos lados de $p(x)=q(x)d(x)+r(x)$ entre $d(x)$, podemos expresarlo como

$$\frac{p(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}.$$

A causa de esto, $p(x)$ se llama dividendo, $d(x)$ divisor, $q(x)$ cociente y $r(x)$ residuo o resto. Este resultado es válido para polinomios multivariados. Para realizar dicha división podemos resumirla a como sigue:

1. Arreglar los términos del dividendo y del divisor en potencias descendentes de la variable, dejando espacios para los términos faltantes.
2. Obtener el primer término del cociente dividiendo el término principal (inicial) del dividendo entre el término principal del divisor.
3. Multiplicar el divisor por este término del cociente y restar el producto del dividendo.
4. Usar el residuo de esta resta, junto con los términos no utilizados del dividendo como un nuevo dividendo (dividendo intermedio) y seguir los pasos 2. a 4. Repetidamente, obteniendo cada vez un nuevo término del cociente.
5. Cuando el residuo tenga grado menor que el del divisor (o que sea cero), el proceso ha terminado.

Ejemplo 5: Dividir $4x^3 + 17x^2 + 8x - 5$ entre $x + 3$.

Observemos que los polinomios están ordenados de manera descendente, podemos proceder a dividir,

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{4x^3 + 17x^2 + 8x - 5} & \underline{\mathbf{x + 3}} \\
-(4x^3 + 12x^2) & \mathbf{4x^2 + 5x - 7} \\
\hline
5x^2 + 8x - 5 & \\
-(5x^2 + 15x) & \\
\hline
-7x - 5 & \\
-(-7x - 21) & \\
\hline
\mathbf{16} &
\end{array}
$$

dividendo

divisor

cociente

residuo

Por tanto, $4x^3 + 17x^2 + 8x - 5 = (4x^2 + 5x - 7)(x + 3) + 16$.

Ejemplo 6: Dividir $x^4 + x^3 + 2x + 15$ entre $2x^2 - 6x + 4$.

Tenemos entonces,

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{x^4 + x^3 \qquad + 2x + 15} & \underline{\mathbf{2x^2 - 6x + 4}} \\
-(x^4 - 3x^3 + 2x^2) & \mathbf{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5} \\
\hline
4x^3 - 2x^2 + 2x + 15 & \\
-(4x^3 - 12x^2 + 8x) & \\
\hline
10x^2 - 6x + 15 & \\
-(10x^2 - 30x + 20) & \\
\hline
\mathbf{24x - 5} &
\end{array}
$$

Por tanto, $x^4 + x^3 + 2x + 15 = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5\right)(2x^2 - 6x + 4) + (24x - 5)$.

Consultar y analizar casos de productos notables, factorización (factor común, diferencia de cuadrados y trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$) y mínimo común múltiplo de dos o más polinomios.

Lazo, A. Silva, J. Hernández. M. (2008). *Álgebra Preuniversitaria*. México: Limusa. página (229-250)

Álgebra Baldor. 2007 de la página (188-191)

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Fracción algebraica. Una fracción algebraica es un cociente de expresiones algebraicas. Por ejemplo,

$$\frac{3}{x}, \quad \frac{5r + r^2}{r - 1}, \quad \frac{m}{m^2 - 1}, \quad \frac{y - 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}.$$

Simplificación de Fracciones Algebraicas. Una fracción algebraica está simplificada cuando el numerador y el denominador no tienen más factores comunes que la unidad. El proceso de simplificar una fracción algebraica consiste en:

1° Factorizar en la medida de la posible el numerador y el denominador de la fracción dada.

2° Eliminar los factores comunes que hayan en el numerador y denominador.

Ejemplo 7: Simplifique las fracciones siguientes:

a) $\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$ **b)** $\frac{2a^3-10a}{10a^2}$

a) Factoricemos el numerador: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Factoricemos el denominador: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x-1)$

Luego,

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-1)},$$

eliminando el factor común resulta

$$\frac{x+2}{x+1}.$$

Expresión que evidentemente está simplificada.

b) Al factorizar numerador y denominador tenemos

$2a^3 - 10a = 2a(a^2-5)$ y $10a^2 = 5a(2a)$.

Sustituyendo,

$$\frac{2a^3-10a}{10a^2} = \frac{2a(a^2-5)}{5a(2a)} = \frac{a^2-5}{5a}.$$

Suma y resta de fracciones algebraicas

Cuando poseen el mismo denominador. La suma o resta algebraica de dos o más fracciones con un mismo denominador es igual a una fracción con este "denominador común"; es decir: se suman ó restan los numeradores y se parte por el denominador común.

Ejemplo 8: Sume las expresiones $\frac{t^2}{t-2}$, $\frac{-4t^2}{t-2}$ y $\frac{5}{t-2}$

$$\frac{t^2}{t-2} + \frac{(-4t^2)}{t-2} + \frac{5}{t-2} = \frac{t^2+(-4t^2)+5}{t-2} = \frac{-3t^2+5}{t-2}.$$

Cuando poseen distintos denominadores. Para sumar o restar fracciones algebraicas de distinto denominador se resuelve a través de los pasos siguientes:

a) Factorizar los denominadores de las fracciones dadas y escribir la operación indicada con sus denominadores factorizados.

b) Determinar el mínimo común denominador "mcd" de las fracciones dadas.

c) Una vez encontrado el mínimo común denominador, éste se divide por el denominador de cada fracción, el resultado se multiplica por el numerador de la fracción respectiva y se simplifica si es posible.

Ejemplo 9: Determine la suma $\frac{3x}{x^2-2x+1}+\frac{x-3}{x^2-1}$.

$$\frac{3x}{x^2-2x+1}+\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{3x}{(x-1)^2}+\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}=\frac{3x(x+1)+(x-3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{3x^2+3x+x^2-x-3x+3}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{4x^2-x+3}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{4x^2-x+3}{x^3-x^2-x+1}.$$

De manera análoga se resuelve la sustracción de fracciones algebraicas.

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de varias fracciones algebraicas es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

Observación. Cuando han de multiplicarse entre sí varias fracciones algebraicas es conveniente seguir el siguiente procedimiento:

1. Descomponer los términos de cada uno de ellos en productos indicados.
2. Indicar el producto de los factores que constituyen los numeradores y denominadores.
3. Simplificar los factores comunes que hallan en el numerador y denominador de la nueva fracción.

Ejemplo 11: Multiplicar y simplificar las siguientes expresiones.

1) $\frac{2a+2b}{4}\cdot\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{(2a+2b)\,(a-b)}{4\,(a^2-b^2)}=\frac{2\,(a+b)(a-b)}{4\,(a-b)(a+b)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

2) $\frac{x^2+3x-10}{x^2-25}\cdot\frac{2x+10}{6x+12}=\frac{(x^2+3x-10)(2x+10)}{(x^2-25)(6x+12)}=\frac{(x-5)(x+2)(2)(x+5)}{(x-5)(x+5)(6)(x+2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$

División de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones algebraicas es la fracción que resulta de multiplicar la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.

Ejemplo 12: Efectúe las siguientes divisiones y simplifique su respuesta.

a) $\frac{6b^2}{4a}\div\frac{3b}{2a^2}=\frac{(6b^2)(2a^2)}{(4a)(3b)}=\frac{(3b)(b)(2a)(a)}{2(2a)(3b)}=\frac{ab}{2}$

b) $\frac{x-1}{4}\div\frac{3x-3}{8}=\frac{(x-1)(8)}{(4)(3x-3)}=\frac{(x-1)(4)(2)}{4(3)(x-1)}=\frac{2}{3}.$

Indicador 1. Resuelve operaciones de suma y resta con polinomios para desarrollar el pensamiento reflexivo y analítico en su desempeño profesional.

Actividad 4 Resuelve operaciones de suma y resta con polinomios

1. Proporcione un ejemplo de un polinomio de cuatro términos en la variable z de grado 5 escrito en orden descendente y que carezca de un término de cuarto grado.
2. El exponente en la expresión 6^3 es 3. Explique por qué el grado de 6^3 no es 3. ¿Cuál es su grado?
3. ¿Cuál de los siguientes es un trinomio en orden descendente, con grado 6?
   - **a.** $5x^6 - 4x^5 + 12$
   - **b.** $6x^5 - x^6 + 4$
   - **c.** $2x + 4x^2 - x^6$
   - **d.** $4x^6 - 6x^4 + 9x + 1$
4. Simplifique suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes.
   - **a.** $4x^2 + [-(x^2 - xy) + (-3y^2 + 2xy) - (-3x^2 + y^2)]$
   - **b.** $2a + \{-[5b + (3a - c) + 2 - (-a + b - \overline{c + 4})] - (-a + b)\}$
5. Encuentra cada una de las siguientes sumas y restas.
   - **a.** $(3x^2 - 4x + 5) + (-2x^2 + 3x - 2)$
   - **b.** $(6m^4 - 3m^2 + m) - (2m^3 + 5m^2 + 4m) + (m^2 - m)$
   - **c.** $5(2x^2 - 3x + 7) - 2(6x^2 - x + 12)$
   - **d.** $8x^2y - 3xy^2 + 2x^2y - 9xy^2$
   - **e.** $\left(\frac{2}{3}m^3 - \frac{1}{4}mn^2 + \frac{2}{5}n^3\right) + \left(\frac{1}{6}m^2n + \frac{1}{8}mn^2 - \frac{3}{5}n^3\right) + \left(m^3 - \frac{1}{2} + n\right)$
   - **f.** De $-7x^2y$ restar la suma de $4xy^2 - x^3$ con $5x^2y + y^3$
6. Una empresa construye estructuras prediseñadas para casas y edificios. Si x representa el número de estructuras y los costos de producción (en dólares) son $x^2 + 12x - 1200$ para las casas y $3x^2 + x + 2\,000$ para los edificios, ¿cuál es el costo total de producción de la compañía? ¿Cuánto es el costo de 20 casas y 5 edificios?

Indicador 2. Resuelve operaciones de multiplicación y división de polinomios para desarrollar el pensamiento reflexivo y analítico en su desempeño profesional.

Actividad 5 Resuelve operaciones de multiplicación y división de polinomios

1. Encuentre cada uno de los siguientes productos y divisiones.
   a. $(2z-1)(-z^2+3z-4)$
   b. $(-3xy)(6x^2-2xy+y^3)(x-y)$
   c. $(2z^4-3y)^2$
   d. $(a^3-a^2b)(-ab)(2a-b)$
   e. Dividir $x^2+15-8x$ entre $3-x$
   f. Dividir $\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{36}a-\frac{1}{6}$ entre $\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}$
2. Use el algoritmo de la división para expresar $5x-4x^2-7+6x^3$ como el producto de $x-2$ y otro polinomio, más un residuo constante.
3. Simplifique:
   a. $(x+3)(x-4)+3(x-1)(x+2)$
   b. $x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)-3x^2y^2$
4. El largo de un terreno rectangular en metros lo determina la expresión $2a^2+3a+2$ y su ancho lo representa $2a-1$, ¿cuál es la superficie del terreno en metros cuadrados?
5. Las dimensiones de una caja en decímetros son $2w-3$ de largo, $3w+1$ de ancho y $2w+1$ de altura. ¿Cuál es su volumen?
6. Al adquirir $2x+3$ artículos se paga un importe de $10x^2+29x+21$ córdobas, ¿cuál es el precio unitario de los artículos?

Indicador 3. Realiza operaciones con fracciones algebraicas para desarrollar el pensamiento reflexivo y analítico en su desempeño profesional.

Actividad 6 Realiza operaciones con fracciones algebraicas

1. Efectúe las operaciones indicadas expresando su respuesta en su mínima expresión.

   a. $\frac{25xy}{x^2+y^2} - \frac{16xy}{x^2+y^2}$

   b. $\frac{a-3b}{a+b} + \frac{a+5b}{a+b}$

   c. $\frac{7x}{x^2+6x+9} - \frac{1}{x^2-9}$

   d. $\frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{2a}{1^2}$

   e. $\frac{3a+3}{2a^2+6a} - \frac{a-4}{a^2-a-12} + \frac{a+1}{3a^2-12a}$

   f. $\frac{17x^2}{54ab} \div \frac{34x}{9ab^2}$

   g. $\frac{x+y}{a-2b} \cdot \frac{2b-a}{2x+2y}$

   h. $\frac{8a^4b^4}{7ab^2} \div \frac{44a^4b^3}{28a^2b^2} \cdot \frac{11ab}{7a^5b^3}$

   i. $\left(x+4+\frac{2}{x+1}\right) \div \left(x-1-\frac{9}{x-1}\right)$

   j. $\dfrac{y-1-\frac{5}{y+3}}{y+5-\frac{35}{y+3}}$

   k. $\frac{x^3-5x^2}{x^3-25x} \div \frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} + \frac{x^2+3x+4}{x^2+6x+8} \times \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+5}$

Unidad III

ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Emplea ecuaciones algebraicas en la resolución de problemas relativos al campo agrario con responsabilidad

SUMARIO

En esta unidad aprenderemos a resolver ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones 2×2 y 3×3. En la unidad anterior establecimos que una expresión algebraica involucra operaciones básicas de suma, resta, multiplicación o división (excepto por 0), la elevación a alguna potencia o la extracción de raíces aplicadas a cierto conjunto de variables y números. Algunos ejemplos son

$$8x + 9,\ \sqrt{y} + 4 \ \text{ y } \frac{x^3y^8}{z}.$$

Una *ecuación* es la afirmación de que dos expresiones algebraicas son iguales. Se utilizan ecuaciones en todos los campos que emplean números reales. En términos generales, supongamos que tenemos una **ecuación en x**, es decir, un enunciado de igualdad que contiene una variable, x; un conjunto asociado a esta ecuación (generalmente $\mathbb{R}$) denominado **dominio de la variable**. Una **solución** o **raíz** de esta ecuación es un número b que pertenece al dominio de la variable que hace al enunciado verdadero al sustituirlo por x y decimos que b satisface la ecuación. Así, **resolver una ecuación**, no es más que encontrar todas sus soluciones. Dos ecuaciones con las mismas soluciones se dicen **equivalentes**.

La ecuación más básica en álgebra es la ecuación lineal que estudiaremos a continuación.

ECUACIONES LINEALES

Una *ecuación de primer grado* en una variable (o *ecuación lineal*) es una ecuación que se puede escribir en la forma $ax + b = 0$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Acá x es la variable o incógnita a determinar. Sus elementos son los dos miembros de la igualdad y cada miembro está compuesto por combinaciones de términos.

En toda ecuación, si un término se traslada de miembro, dicho término al trasladarse, realiza la operación inversa a la que realizaba (sí suma entonces resta y viceversa, si multiplica entonces divide y viceversa). Este hecho se justifica por la compatibilidad de la igualdad con la adición y multiplicación de números reales (no nulos en el caso del producto).

Solución de una ecuación lineal en una variable

Los pasos que se usan para resolver una ecuación lineal en una variable son los siguientes (no todas las ecuaciones requieren todos los pasos).

1. Elimine todas las fracciones.
2. Simplifique cada miembro por separado.
3. Coloque en un solo miembro los términos que contengan la variable.
4. Transforme, de tal manera que el coeficiente de la variable sea 1.
5. Compruebe.

Ejemplo 1: Resuelva la ecuación $7x - 4 = 16 + 2x$.

$$7x - 4 = 16 + 2x$$
$$7x - 2x = 16 + 4$$
$$5x = 20$$
$$x = \frac{20}{5}$$
$$x = 4$$

Comprobación: $7(4) - 4 = 16 + 2(4) \Longrightarrow 28 - 4 = 16 + 8 \Longrightarrow 24 = 24$.

Ejemplo 2: Resuelva la ecuación $\frac{x}{6} + 5 = \frac{1}{3} - x$.

$$\frac{x}{6} + 5 = \frac{1}{3} - x$$
$$(6)\left(\frac{x}{6} + 5\right) = (6)\left(\frac{1}{3} - x\right)$$
$$(6)\left(\frac{x}{6}\right) + (6)(5) = (6)\left(\frac{1}{3}\right) - (6)(x)$$
$$x + 30 = 2 - 6x$$
$$x + 6x = 2 - 30$$
$$7x = -28$$
$$x = -\frac{28}{7}$$
$$x = -4$$

Comprobación:

$$\frac{-4}{6} + 5 = \frac{1}{3} - (-4)$$
$$\frac{-4 + 30}{6} = \frac{1 + 12}{3}$$
$$\frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$
$$\frac{13}{3} = \frac{13}{3}$$

Ejemplo 3: Resuelva la ecuación $\frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{2} = -4$.

$$6\left(\frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{2}\right) = 6(-4)$$

$$6\left(\frac{x+7}{6}\right) + 6\left(\frac{2x-8}{2}\right) = -24$$

$$x + 7 + 3(2x - 8) = -24$$

$$x + 7 + 6x - 24 = -24$$

$$7x - 17 = -24$$

$$7x = -24 + 17$$

$$7x = -7$$

$$x = -\frac{7}{7}$$

$$x = -1$$

Comprobación: ejercicio.

Es frecuente que la solución de un problema de álgebra dependa del uso de un enunciado matemático o **fórmula** en la que se utilice más de una letra para expresar una relación. En ciertas aplicaciones, la fórmula necesaria se resuelve para una de sus variables, (despeje) que tal vez no sea el número desconocido que deba encontrarse.

Ejemplo 4: Resuelva la fórmula $P = 2L + 2W$ para W.

$$P = 2L + 2W$$

$$P - 2L = 2W$$

$$\frac{P - 2L}{2} = W$$

$$W = \frac{P - 2L}{2}$$

Ejemplo 5: Resuelva $0.06x + 0.09(15 - x) = 0.07(15)$.

$$0.06x + 0.09(15 - x) = 0.07(15)$$

$$6x + 9(15 - x) = 7(15)$$

$$6x + 135 - 9x = 105$$

$$-3x + 135 = 105$$

$$-3x = 105 - 135$$

$$-3x = -30$$

$$x = \frac{-30}{-3}$$

$$x = 10$$

Comprobación: $0.06(10) + 0.09(15 - 10) = 0.07(15) \Longrightarrow 0.6 + 0.45 = 1.05 \Longrightarrow 1.05 = 1.05$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación de *segundo grado* (o *ecuación cuadrática*) es una ecuación que se puede escribir en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Esta puede resolverse por factorización, por el método de la raíz cuadrada o por medio de la fórmula cuadrática dada por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Las soluciones así obtenidas podrán ser reales (distintas o iguales) o imaginarias (no tienen solución en $\mathbb{R}$).

Ejemplo 6: Resuelva la ecuación $2x^2 - 4x = 0$.

Usaremos en este caso el método de factorización el cual puede utilizarse en todos los casos en los que la ecuación sea fácilmente factorizable.

$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x - 2) = 0$$
$$2x = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $2x^2 - 4x = 0$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

Ejemplo 7: Determine las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

Para este caso usaremos el método de la raíz cuadrada, exclusivo para el caso en el que el coeficiente del término lineal sea 0. Entonces

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3.$$

De esta manera, las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$.

Ejemplo 8: Halle las raíces de $9x^2 + 6x = 1$.

Resolveremos la ecuación dada haciendo uso de la fórmula cuadrática. Cabe destacar que la fórmula cuadrática es aplicable a cualquier ecuación cuadrática.

Escribiendo la ecuación dada en su forma estándar tenemos

$$9x^2 + 6x - 1 = 0,$$

de lo cual se obtiene que $a = 9$, $b = 6$ y $c = -1$. Ahora apliquemos la fórmula cuadrática

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(9)(-1)}}{2(9)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+36}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{72}}{18};$$

Así,

$$x_1 = \frac{-6+\sqrt{72}}{18} \qquad \wedge \qquad x_2 = \frac{-6-\sqrt{72}}{18}.$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0.14$ y $x_2 = 0.80$.

Ejemplo 8: Resuelva $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Aquí, $a = 1$, $b = -4$ y $c = 2$. Sustituyendo estos valores en la fórmula cuadrática obtenemos

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2}.$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 2 = 0$ son

$$x_1 = 2 + \sqrt{2}, \qquad x_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistemas lineales con dos variables

La definición de ecuación lineal dada antes se extiende a más variables. Cualquier ecuación de la forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

para números reales $a_1, a_2, \dots, a_n$ (no todos los cuales son cero), y, b, es una ecuación lineal en n variables. Si todas las ecuaciones de un sistema son lineales, el sistema es un **sistema de ecuaciones lineales**, o sistema lineal.

Así, un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ son números reales no todos nulos.

Resolver un sistema 2×2 consiste en determinar los valores de las variables que satisfacen simultáneamente al par de ecuaciones dadas. La solución del sistema de ecuaciones es el par ordenado $(x_0,\ y_0)$.

Existen distintos métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables; estos métodos son ya conocidos por ustedes en el bachillerato; pero en este curso abordaremos únicamente los métodos de Igualación, Sustitución, Eliminación y la regla de Cramer.

Resolución de Sistemas lineales por sustitución

1. Despejar la variable más conveniente en una de las ecuaciones.
2. Sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso anterior, la cual contiene una sola variable.
4. Sustituir el valor de la variable obtenida en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y de esa manera obtener el valor de la otra variable.

Ejemplo 9: Resuelva el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x \; - y = 4. \end{cases}$ por sustitución.

$2x - 4 = y$	Despejando la variable "y " en la segunda ecuación del sistema
$3x + 4(2x - 4) = -5$	Sustituyendo el valor de "y" en la primera ecuación
$3x + 8x - 16 = -5$	Resolviendo el producto.

De aquí que:

$$11x = 16 - 5 \Longrightarrow 11x = 11 \Longrightarrow x = \frac{11}{11} \Longrightarrow x = 1.$$

Sustituyendo el valor de $x = 1$ en la ecuación 1 se tiene que:

$$3(1) + 4y = -5 \;\Longrightarrow\; 4y = -3 - 5 \Longrightarrow 4y = \; -8 \;\Longrightarrow\; y = \frac{-8}{4} \;\Longrightarrow\; y = \; -2.$$

La solución del sistema es el par ordenado $(1, -2)$.

Resolución de Sistemas lineales por eliminación (suma y resta)

1. Multiplicar las ecuaciones por números convenientes que permita que una de las variables en ambas ecuaciones tenga igual coeficiente numérico con signo contrario.
2. Sumar las ecuaciones con el propósito de eliminar una de las variables.
3. Resolver la ecuación resultante. (Determina el valor de una de las variables)
4. Sustituir el valor hallado en cualquiera de las ecuaciones y resolver la ecuación resultante. (determina el valor de la otra variable)

Ejemplo 10: Resuelva el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x \; - y = 4. \end{cases}$ por eliminación.

Al multiplicar la primera ecuación por 1 y la segunda por 4 obtenemos

$$\begin{cases} 3x + 4y = -5 & (1) \\ \;\; 2x - y = 4 & (4) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 8x - 4y = 16 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones resulta

$$11x = 11 \Longrightarrow x = \frac{11}{11} \Longrightarrow x = 1.$$

Sustituyendo el valor de $x = 1$ en la primera ecuación se tiene que:

$$3(1) + 4y = -5 \Longrightarrow 4y = -3 - 5 \Longrightarrow 4y = -8 \Longrightarrow y = \frac{-8}{4} \Longrightarrow y = -2.$$

La solución del sistema es $(1, -2)$.

Resolución de Sistemas lineales por igualación

1. Se despeja la misma variable en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las ecuaciones obtenidas.
3. Se resuelve la ecuación resultante. (Esto determina una de las variables)
4. Se sustituye el valor de la variable determinada en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se resuelve. (Esto determina el valor de la otra variable)

Ejemplo 11: Resuelva el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$ por igualación.

Despejando "y" en ambas ecuaciones $y = \frac{-5-3x}{4}$ y $y = 2x - 4.$ Igualando ambas ecuaciones:

$$\frac{-5 - 3x}{4} = 2x - 4.$$

Resolviendo tenemos

$$\begin{aligned} -5 - 3x = 4(2x - 4) &\Longrightarrow -5 - 3x = 8x - 16 \\ &\Longrightarrow -5 + 16 = 8x + 3x \\ &\Longrightarrow 11 = 11x \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{11}{11} = x \Longrightarrow x = 1.$$

Sustituyendo el valor de $x = 1$ cualquiera de las ecuaciones se obtiene que $y = -2$.

Resolución de Sistemas lineales por la Regla de Cramer

Un determinante 2×2 es un arreglo rectangular de la forma

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Obsérvese que el valor del determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

definimos el determinante del sistema como el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

Las soluciones del sistema están dadas por las siguientes reglas:

1. El valor de la variable x es igual al cociente cuyo numerador es el determinante que tiene por primera columna los términos independiente y segunda columna los coeficientes de las y; y por denominador el determinante del sistema (distinto de cero). En símbolos,
$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2},$$
2. El valor de la variable y es igual al cociente cuyo numerador es el determinante que tiene por primera columna los coeficientes de las x y segunda columna los términos independientes; y por denominador el determinante del sistema (distinto de cero). En símbolos,
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

Ejemplo 12: Resuelva el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x \; - y = 4. \end{cases}$ por la regla de Cramer.

Calculemos el determinante del sistema
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (4)(2) = -3 - 8 = -11.$$

Ahora, encontremos x e y:
$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{(-5)(-1) - (4)(4)}{-11} = \frac{5 - 16}{-11} = \frac{-11}{-11} = 1.$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{(3)(4) - (-5)(2)}{-11} = \frac{12 + 10}{-11} = \frac{22}{-11} = -2.$$

La solución del sistema es la pareja $(1, -2)$.

Sistemas lineales con tres variables

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables tiene la forma:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

donde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ son números reales no todos nulos. Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables se pueden hacer dos combinaciones entre dos de ellas de modo que usando el método de reducción el sistema quede reducido en dos variables y luego usar cualquiera de los métodos antes mencionados para hallar el valor de las variables, aunque se recomienda emplear el método de Cramer.

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES

Estimado estudiante en esta sección aplicaremos los procedimientos de resolución de ecuaciones en problemas de la vida cotidiana y del campo agrario. Si bien no existe un método que permita resolver todos los tipos de problemas, son útiles los pasos siguientes:

1) **Leer** el problema con cuidado hasta comprender qué información tenemos y qué información habrá que encontrar.
2) **Asignar variables** que representen los valores desconocidos, utilice diagramas o tablas según sea necesario.
3) **Escriba ecuaciones** por medio de la(s) expresión(es) variable(s).
4) **Resuelva** la ecuación o el sistema de ecuaciones.
5) **Enuncie la respuesta.** ¿Parece razonable?
6) **Compruebe** la respuesta en palabras del problema original.

Ejemplo 12: Johnny tiene un plan post-pago de celular por el cual él paga $\$\,39.95$ al mes por $450\,min$ de tiempo aire. Minutos adicionales a los 450 son cargados a una tarifa de $\$\,0.40$ el minuto. Si la cuenta de Johnny para este mes ascendió a los $\$\,87.95$, ¿cuántos minutos fuera del plan consumió?

1 Lea y analice el problema

2 Asigne variables

x representa el número de minutos fuera del plan
$0.40x$ representa el costo para x minutos adicionales

3 Escriba ecuaciones

$$\left(\begin{matrix} cuota \\ mensual \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} costo\ de \\ minutos\ adicionales \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} Costo \\ total \end{matrix}\right)$$

$$39.95 \quad + \quad 0.40x \quad = \quad 87.95$$

4 Resuelva la ecuación

$$39.95 - 39.95 + 0.40x = 87.95 - 39.95$$
$$0.40x = 48.00$$
$$\frac{0.40x}{0.40} = \frac{48.00}{0.40}$$
$$x = 120$$

Johnny habló $120\,min$ más que los establecidos en su plan.

5 Compruebe su respuesta.

$$\begin{array}{lr} 120 \times \$\,0.40 = & \$\,48.00 \\ & +\,\$\,39.95 \\ \hline \text{Total} & \$\,87.95 \end{array}$$

Ejemplo 12: En el examen de admisión de habilidades numéricas de la Universidad Nacional Agraria de 35 preguntas la nota de Nohelia ha sido un 14. Si cada acierto vale un punto y cada error resta dos puntos, ¿cuántas preguntas ha acertado Nohelia?, ¿cuántas ha fallado?

1 Lea detenidamente el problema

2 Asignemos variables

x representa el número de preguntas respondidas acertadamente

y representa el número de preguntas respondidas erróneamente

$x + y$ representa el total de preguntas

$1x$ representan los puntos ganados en los aciertos

$2y$ representa los puntos perdidos en los desaciertos

3 Escribamos las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} preguntas \\ acertadas \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} preguntas \\ falladas \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} total\ de \\ preguntas \end{pmatrix}$$

$$x \quad + \quad y \quad = \quad 35$$

$$\begin{pmatrix} puntos \\ ganados \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} puntos \\ perdidos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} total\ de \\ puntos \end{pmatrix}$$

$$x \quad - \quad 2y \quad = \quad 14$$

Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ x - 2y = 14 \end{cases}$$

4 Resolvamos el sistema

Despejemos x en la segunda ecuación $x - 2y = 14 \Rightarrow x = 2y + 14$,

Sustituyámosla en la primera

$$x + y = 35 \implies (2y + 14) + y = 35 \implies 3y = 35 - 14 \implies y = \frac{21}{3} = 7.$$

Sustituyamos $y = 7$ en la primera ecuación:

$x + y = 35 \implies x + 7 = 35 \implies x = 35 - 7 = 28.$

Nohelia acertó 28 preguntas y falló 7.

5 Compruebe su respuesta

$7 + 28 = 35$ es el total de preguntas del examen

$(28)(1) - (2)(7) = 28 - 14 = 14$ es el total de puntos obtenidos por Nohelia

Los valores encontrados satisfacen las condiciones dadas en el problema.

Indicador 1. Resuelve ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado con una variable de manera precisa para favorecer el análisis, la toma de decisiones y un desempeño exitoso.

Actividad 7 Resuelve ecuaciones algebraicas de primero y segundo grado con una variable

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales en la variable x? Las que no lo sean explique por qué no.

- **a.** $3x + x - 1 = 0$
- **b.** $8 = x^2$
- **c.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{x} = 0$
- **d.** $6x + 2 = 9$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

- **a.** $7(y + 1) = 5(y + 1) + 2$
- **b.** $\frac{1}{3x} + \frac{2}{5} = 0$
- **c.** $x(x + 4) = x^2 - 5x + 16$
- **d.** $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{5}$
- **e.** $\frac{x-4}{3} - 5 = 0$
- **f.** $10 - \frac{3x+5}{6} = 3\frac{11}{12} - \frac{\frac{x}{2}}{4}$
- **g.** $x^2 = 25$
- **h.** $x^2 + 12 = 7x$
- **i.** $x^2 - 8x + 12 = 0$
- **j.** $2x^2 + 6x = 0$
- **k.** $4x^2 - 36 = 0$
- **l.** $4x^2 + 7x - 2 = 0$
- **m.** $8x^2 + 18x + 9 = 0.$

3. Un recurso para fórmulas geométricas establece el perímetro de un rectángulo como $P = 2L + 2W$, mientras que otro afirma que es $P = 2(L + W)$. ¿Son equivalentes? Si lo fueran, ¿qué propiedad justifica su equivalencia?

4. Resuelva cada fórmula para la variable que se especifica.

- **a.** $A = \frac{1}{2}bh$; para h (área de un triángulo)
- **b.** $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$; para h (superficie de un cilindro circular recto)
- **c.** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$; para F (conversión de grados Fahrenheit a Celsius)
- **d.** $I = Pin$; para i (interés simple)

Indicador 2. Resuelve sistemas de ecuaciones con dos y tres variables para la dar solución a situaciones problémicas del campo profesional.

Actividad 8 Resuelve sistemas de ecuaciones con dos y tres variables

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

   a. $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 3p + 7q = 2 \\ 7p + 8q = -2 \end{cases}$

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de eliminación.

   a. $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 9m + 11n = -14 \\ 6m - 5n = -34 \end{cases}$

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de igualación.

   a. $\begin{cases} a - b = 8 \\ a + b = 12 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 4x - 26 = y \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$

4. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones con la Regla de Cramer.

   a. $\begin{cases} 2h + b = 110.4 \\ h + 2b = 106.32 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 5\sqrt{3}x + 1 = 2\left(2\sqrt{3}x + \sqrt{2}y\right) \\ \sqrt{3}\left(\sqrt{3}x - 1\right) = 2\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$

5. Resuelva los siguientes sistemas 3×3 con el método que estime conveniente.

   a. $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 6x - 2y - z = -14 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x = 2(1 + 2y) - 9z \\ y = 2(2z - x) - 13 \\ z = 2(y + 4) + 3x \end{cases}$

Indicador 3. Resuelve problemas aplicados al campo agrario donde intervienen ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado en una variable y sistemas de ecuaciones $\mathbf{2 \times 2}$ y $\mathbf{3 \times 3}$.

Actividad 9 Resuelve problemas con ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado en una variable y sistemas 2×2 y 3×3

1. Un empleado bancario tiene 25 billetes más de 5 córdobas que billetes de 10 córdobas. El total del dinero es $C\$\,200$. ¿Cuánto dinero tiene en billetes de cada denominación? *R: 5 billetes de $C\$\,10$ y 30 billetes de $C\$\,5$.*
2. Un químico necesita mezclar 20 litros de una solución ácida al $40\,\%$ con otra al 70%, a fin de obtener una mezcla también ácida al 50%. ¿Cuántos litros debe usar de la solución ácida al 70%? *R: Se necesitan usar 10 litros de solución al $70\,\%$.*
3. En t segundos la altura h, en metros sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h = 80t - 5t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a $320\,m$ sobre el nivel del suelo? *R: El proyectil tardará $8\,s$ en estar a $320\,m$ sobre el nivel del suelo.*
4. La suma de tres áreas agrícolas cultivadas con maíz es $17\,ha$. La primera área sumada con tres veces la segunda y el doble de la tercera es $25\,ha$; y la suma del doble de la segunda con tres veces la tercera es igual a la primera. Hallar las áreas agrícolas cultivadas con maíz. *R*: $12\,ha,\ 3\,ha$ *y* $2\,ha$.
5. Cinco manzanas y ocho plátanos cuestan 115 córdobas. Tres manzanas y cinco plátanos cuestan 70 córdobas. Halle el precio de cada manzana y de cada plátano. *R: las manzanas cuestan $C\$\,15$ y los plátanos $C\$\,5$.*
6. Un comerciante mezcla tabaco de 28 dólares el kilogramo con otra clase de tabaco de 36 dólares el kilogramo, obteniendo una mezcla de $100\,kg$ a $\$\,31.20$ el kilogramo. ¿Qué cantidad ha mezclado de cada clase? *R: 60 y 40.*
7. En una tienda departamental ponen en oferta camisas y pantalones que están fuera de temporada. El primer día se vendieron cinco pantalones y siete camisas, para totalizar $\$1\,060$, el segundo día de ventas se invirtieron las cantidades y se ganaron $\$1\,100$. ¿Cuál fue el precio de un pantalón y de una camisa? *R: El precio de un pantalón es $\$\,100$ y el precio de una camisa $\$\,80$.*
8. Un hacendado compró 4 vacas y 7 caballos por $\$\,51\,400$. Si más tarde, a los mismos precios, compró 8 vacas y 9 caballos por $\$\,81\,800$, hallar el costo de una vaca y un caballo. *R: Una vaca cuesta $\$\,5\,500$ y un caballo $\$\,4\,200$.*

Unidad IV

ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Aplica el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas para la toma de decisiones eficientes de forma responsable en situaciones problémicas de las ciencias agrarias

SUMARIO

Las matemáticas son un idioma que usamos para describir nuestro mundo. Los números y cálculos sirven para decir “cuánto” o “qué tan grande”. También sirven para hacer comparaciones. La geometría habla del espacio que nos rodea y de los objetos y figuras que hay en él.

¿Alguna vez has hecho figuras en la pared con sombras? Las imágenes que proyectas en la pared son planas. Los cuadrados, los triángulos y otras figuras más, se llaman **figuras planas** porque están en un solo plano.

En geometría, un plano es una superficie bidimensional totalmente plana e infinitamente larga. Pero a pesar de ser totalmente planos, los planos y las figuras planas son muy útiles en nuestro mundo tridimensional. Piensa en los mapas de ciudades, los diagramas para jugadas de béisbol y los juegos animados por computadora.

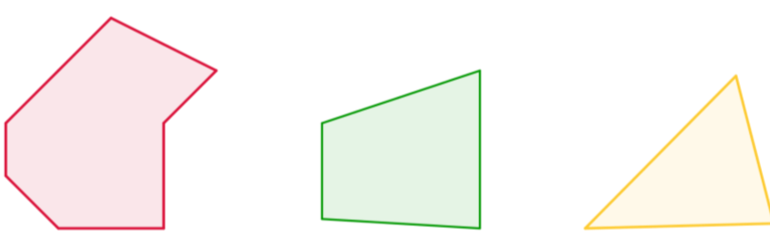
Las figuras planas son de diferentes formas y tamaños y pueden agruparse según su número, tamaño y posición de sus lados y ángulos. Pueden medirse y moverse, doblarse y organizarse en patrones, y agrandarse o reducirse.

Un **polígono** es una figura cerrada cuyos lados son segmentos de rectas. La distancia que hay alrededor de un polígono se llama **perímetro**.

El **área** de una figura es el número de unidades cuadradas que hay dentro de la figura.

Para hallar el perímetro de cualquier polígono suma las longitudes de sus lados.

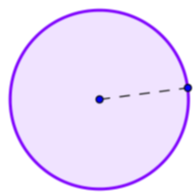
Cada vez que miras un puente, un edificio o una estación espacial, ves muchos triángulos. Un **triángulo** es una figura bidimensional cerrada de tres lados que son segmentos de recta. Si la figura es de cuatro lados se denomina **cuadriláteros**.



Piensa en un perro con su correa. La correa está amarrada a una estaca en medio de un gran patio. A menos que haya árboles en el patio, el perro puede llegar hasta cualquier punto del patio comprendido en el radio (largo de la correa) del círculo.

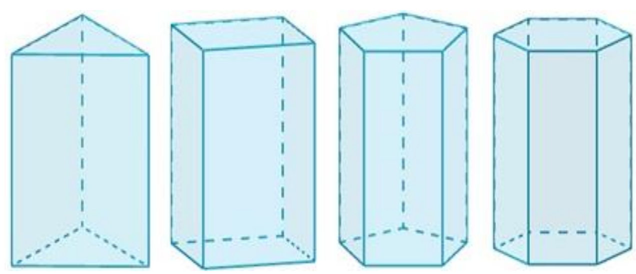
Algunos autores llaman a la longitud de la circunferencia como perímetro del círculo.

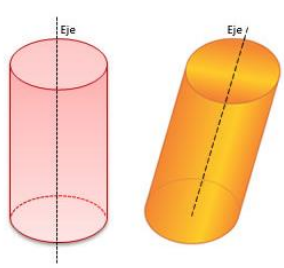
Una **circunferencia** es una serie de puntos que están a la misma distancia de un punto dado llamado centro de la circunferencia. Los puntos del interior de la circunferencia junto con ella mismo forman lo que denominamos **círculo.**



Imagina un mundo en el que la gente construye cosas sin importar la forma. ¿Cómo sería tu bicicleta y tus patines si las ruedas fueran prismas en lugar de cilindros? ¿Cómo sería comer en mesas que no fueran planas? ¿Y qué tal vivir en una casa en forma de esfera en lugar de un prisma, o que los pisos fueran esféricos y no planos?

Un **poliedro** es una figura tridimensional cerrada con caras poligonales. Los poliedros que tienen al menos dos caras congruentes y paralelas se llaman **prismas**. Un prisma que tiene bases rectangulares se llama *prisma rectangular*. Un prisma cuyas caras son cuadrados congruentes es un *cubo*.





Casi todas las latas de alimentos son cilindros. También los rollos de papel y los tubos de agua. En geometría, un **cilindro** es una figura sólida que tiene dos bases circulares. Esas bases son congruentes y paralelas.

Seguramente has visto muchos objetos en forma de cono. En geometría, un **cono** es una figura tridimensional con una base circular. Una superficie curva conecta la base con el vértice.

Áreas y Volúmenes (Fórmulas)

Triángulo

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Triángulo equilátero

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Fórmula de Herón

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-C)}$$

Donde a, b y c son las medidas de sus lados y S su semiperímetro.

Área del paralelogramo

Es el producto de la base por la altura del paralelogramo. Es decir,

$$A = b \times h.$$

Área del rectángulo

Es el producto de la base por la altura. Es decir, $A = b \times h$.

Área del cuadrado. Es el producto de la base por la altura. En este caso como los lados son congruentes, la base es igual a la altura, $b = h$ por tal razón el área es lado por lado. Es decir, $A = l^2$.

También el área de un cuadrado es igual al semiproducto de sus diagonales:

$$A = \frac{D^2}{2}.$$

Área del rombo. Es el semiproducto de sus diagonales.

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

Área del trapecio. Es la semisuma de sus bases por la altura. $A = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$

Longitud de la circunferencia

La longitud de una circunferencia es igual a dos veces el valor de π por el radio. Así,

$$L = 2\pi r.$$

Área del círculo

El área del circulo es igual al producto del valor de π y su radio al cuadrado. Esto es:

$$A = \pi r^2.$$

PRISMA

Área lateral

$$A_L = P_b \times h$$

Área total

$$A_T = A_L + 2A_{base}$$

Volumen

$$V = A_{base} \times h$$

CILINDRO

Área lateral

$$A_L = 2\pi rg$$

Área total

$$A_T = 2\pi rg + 2\pi r^2 = 2\pi r(g + r)$$

Volumen

$$V = \pi r^2 g$$

CONO

Área lateral

$$A_L = \pi rg$$

Área total

$$A_T = \pi rg + \pi r^2 = \pi r\,(g + r)$$

Volumen

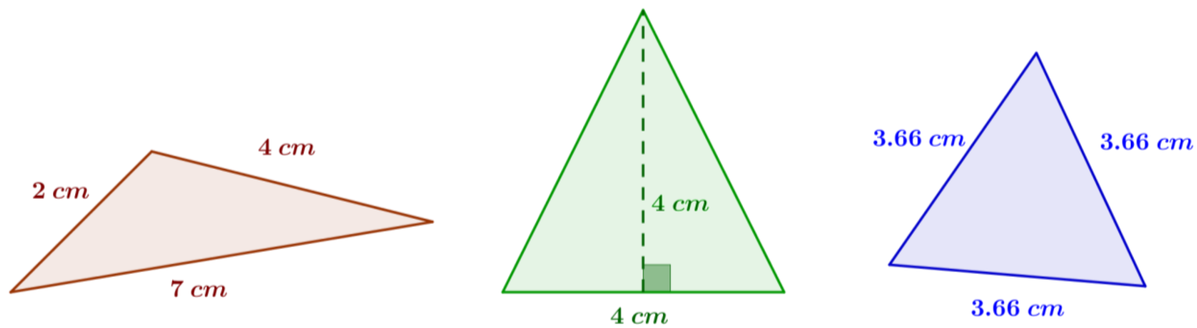
$$V = \frac{1}{3}A_{base} \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

SÓLIDO	ÁREA LATERAL	ÁREA TOTAL	VOLUMEN
Prisma Recto	$\boldsymbol{P_{Base} \times h}$	$\boldsymbol{A_{Lateral} + 2A_{Base}}$	$\boldsymbol{A_{Base} \times h}$
Cilindro Circular Recto	$\boldsymbol{2\pi rg}$	$\boldsymbol{2\pi r(g + r)}$	$\boldsymbol{A_{base} \times h}$
Cono Circular Recto	$\boldsymbol{\pi rg}$	$\boldsymbol{\pi r(g + r)}$	$\boldsymbol{\frac{1}{3}A_{base} \times h}$

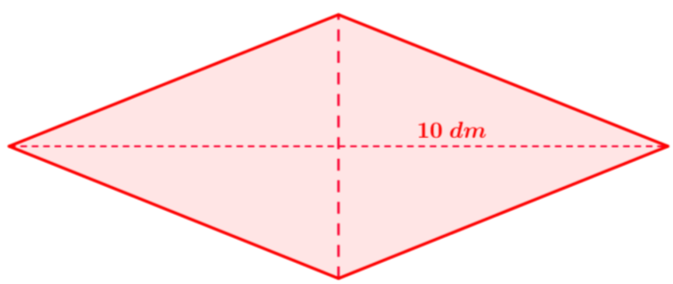
Indicador 1. Calcula perímetros de polígonos y áreas de regiones poligonales para resolver problemas del entorno.

Actividad 10 Calcula perímetro de polígonos y área de regiones poligonales

1. Determine el área de los triángulos siguientes.



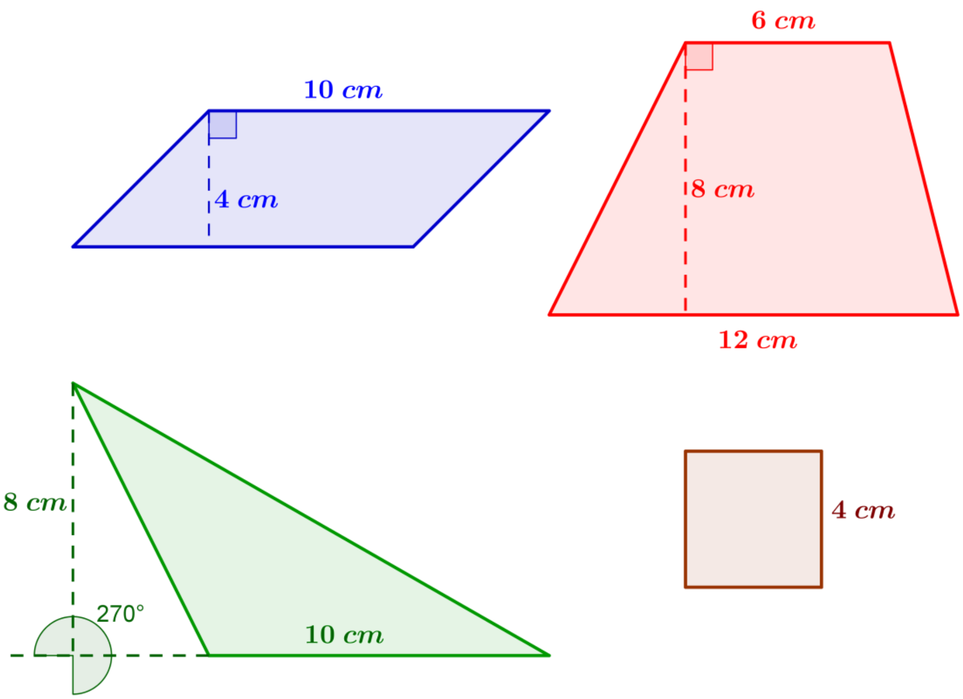
2. Determine el perímetro, la longitud de la diagonal y el área de un terreno de forma cuadrada de $20\ m$ de lado.
3. La diagonal mayor de un rombo mide $10\ dm$ y su área es de $20\ dm^2$. Calcule la longitud de su diagonal menor.



4. El área de un rectángulo es de $228\ m^2$. Si la longitud de la base es el doble de la longitud de su altura, determine las medidas de la base y la altura.
5. En un terreno rectangular de $135\ dam$ de frente y $1\,600\ m$ de fondo se desea sembrar árboles de mangos de rosa a una distancia de 10 varas entre árboles. ¿Cuántos árboles se necesitan para cubrir el área del terreno?
6. Encuentra el valor de x para la figura de la derecha si el perímetro del pentágono es $80\ cm$.
7. Si se aumenta en $2\ km$ al lado de un cuadrado, su área aumenta en $36\ km^2$. Halle la longitud del lado.

8. La base de un rectángulo es el doble de su altura y su área es de $288\, ha$. Halle sus dimensiones.

9. Calcule el área de las figuras siguientes.



10. Calcula el área de un rombo cuyas diagonales miden $8\, mm$ y $10\, mm$.

11. Hallar el área de un hexágono de $4\, cm$ de lado y $5\, cm$ de apotema.

12. La base de un rectángulo es tres veces su altura, si se disminuye en $6\, cm$ la base y se duplica la altura, el perímetro sigue siendo el mismo. Hallar el área del rectángulo.

13. La base mayor de un trapecio es de $12\, cm$ y la base menor $8\, cm$. Determine su altura si su área es de $100\, cm^2$.

14. Un rectángulo tiene $96\, cm^2$ de área y $44\, cm$ de perímetro. Hallar las dimensiones del rectángulo.

15. La diagonal mayor de un rombo excede en $4\, cm$ a la diagonal menor si su área es de $48\, cm^2$. ¿Cuánto mide cada diagonal?

Indicador 2. Calcula longitudes de circunferencias y áreas de círculos para resolver situaciones problémicas del campo agrícola.

Actividad 11 Calcula longitudes de circunferencias y áreas de círculos

1. En la tabla que sigue te proporcionamos uno de los valores r (radio), d (diámetro), L (Longitud) o A (área), de un círculo en particular. Encuentre los tres valores restantes. Deje el símbolo de π en sus respuestas.

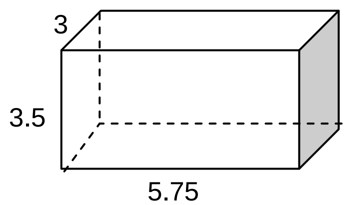
r	d	C	A
$6\ cm$			
$9\ in$			
	$10\ dm$		
	$40\ ft$		
		$12\pi\ m$	
		$18\pi\ mm$	
			$100\pi\ m^2$
			$256\pi\ ha$

2. Las ruedas delanteras de un tractor tienen 1.5 metros de diámetro. ¿Cuántas vueltas darán las ruedas en un terreno de $20\ m$ de largo?
3. María Abeno tiene una cuerda. Si forma con ella una circunferencia, el radio de la misma es $60\ cm$. ¿Cuántos metros mide la cuerda?
4. Un jardín de forma circular necesita ser dividido en dos zonas: una para el césped y otra para plantar flores. La zona de las flores debe ser un tercio del jardín, y para protegerlas, se necesita cerrar esta área con una malla que tiene un costo de $\$2.5$ por metro. Si el radio del círculo mide $20\ m$, ¿cuál es el costo de cerrar el terreno destinado a las flores?

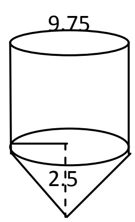
Indicador 3. Calcula áreas laterales, totales y volúmenes de cuerpos geométricos para resolver problemas agrarios.

Actividad 12 Calcula áreas laterales, totales y volúmenes de cuerpos geométricos

1. Se desea construir una pila para almacenar agua de lluvia cuyas dimensiones son $3.5\ m$ de profundidad, $3\ m$ de ancho y $5.75\ m$ de largo. Determine la capacidad en galones de dicho estanque.



2. La siguiente figura es un silo (depósito de almacenamiento de granos), la parte cónica es subterránea con profundidad de $2.5\ m$. y la parte cilíndrica está sobre la superficie cuya circunferencia mide $9.75\ m$. Si la generatriz del cilindro es dos veces el radio. Halle el volumen del depósito.



3. Determine el área total y volumen de un prisma, que tiene como base un hexágono regular, cuyos lados miden $6\ m$ y su altura $25\ m$.
4. Halle el área lateral de un prisma recto octagonal regular cuyo lado da la base mide $6\ cm$ y la arista lateral $15\ cm$.
5. Halle el área lateral de un cilindro circular recto si el radio de la base mide $4\ dm$ y la generatriz $10\ dm$.
6. Halle el área lateral de un cono cuya generatriz mide $6\ cm$ y el radio de la base mide $4\ cm$.
7. Calcule los volúmenes que se piden, use $\pi \approx 3.14$.
   a. Tarro de café, radio de $6.3\ cm$ y altura de $15.8\ cm$
   b. Marcador de carreteras en construcción, cono con altura $2\ m$ y base de radio $1/2$ metro.
   c. Lata de atún, radio de $3.2\ cm$ y altura de $9.5\ cm$

BIBLIOGRAFÍA

Ángel, A. (2008). *Algebra intermedia*. Pearson Educación. 7^{ma} Edición. México. 816 pág.

Baldor, J. A. (2011). *Geometría y Trigonometría.* Grupo Editorial Patria. 3^{ra} Reimpresión. México. 423 pág.

Lazo, A., Silva. J., Hernández. M. (2008). *Algebra Preuniversitaria*. Editorial Limusa. 2^{da} Edición. México. 568 pág.

Miller, Ch., Heeren. V., Hornsby J. (2013). *Matemáticas: razonamiento y aplicaciones*. Pearson Educación. 12^{va} Edición. México. 696 pág.

Moreno, J.L. (2002). *Álgebra*. McGraw Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V. 1^{ra} Edición. 736 pág.

Silva, J., Lazo, A. (2008). *Fundamentos matemáticos*. Editorial Limusa. 7^{ma} Edición. México. 1364 pág.

Vargas, E., Hernández, M., Vite, C., Elizarrarás, S. (2006). *Matemáticas: Álgebra.* Editorial Santillana. México. 448 pág.